Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 21 Juin 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Montrer que $B = \{x \in \Omega;\ \text{la suite } f_n(x) \text{ est bornée}\}$ est un ensemble mesurable.

(2) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Montrer qu'on définit une mesure ν sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ en posant $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

(3) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 1$ telle que $\int_\Omega e^{\alpha f} d\mu < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \{x \in \Omega;\ f(x) \geq \log(n)\}$. En appliquant l'inégalité de Markov à $e^{\alpha f}$, montrer que la série $\sum \mu(B_n)$ est convergente.

(4) Déterminer, si elles existent, les limites quand $n \to \infty$ de

$$I_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\sqrt{t}}{n^2}}}{1+t}\, dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi n t}{3nt+1}\right)}{e^{\frac{t}{n}} + t^{2+|\cos(e^{-n}t)|}}\, dt\,.$$

(5) Soit f une fonction intégrable sur $[0, \infty[$. Montrer que $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x+n)$ est bien défini pour presque tout $x \in [0, 1[$, et que la fonction ϕ est intégrable sur $[0, 1[$.

(6) Soit $\phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Montrer que la formule $f(x) = \int_0^\infty \frac{\phi(t)}{1+t^x}\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]1, \infty[$.

(7) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq x^2 \text{ et } xy \leq 1\}$. Calculer $I = \int_{\mathcal{D}} \frac{y}{x}\, dxdy$.

(8) Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-t(u+i\lambda)} du\right) dt$, déterminer la valeur de $J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\, e^{-i\lambda t} dt$.

(9) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq \sqrt{3}\,|x| \text{ et } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$. Calculer l'intégrale $I = \int_{\mathcal{D}} (x+y) \log(x^2+y^2)\, dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires.

(10) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, soit p tel que $1 < p < \infty$, et soient $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$. En utilisant l'inégalité de Hölder montrer que la fonction $f\,|g|^{p-1}$ est intégrable sur Ω.

Exercice 1. On rappelle la définition de la fonction Γ : pour $s > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

D'autre part, pour $a, b > 0$ on pose

$$J(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,t) = (ut, (1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$.

(2) En déduire que pour tous $a, b > 0$ et pour toute fonction borélienne positive $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y) x^{a-1} y^{b-1} dxdy = J(a,b) \int_0^\infty t^{a+b-1} f(t)\, dt.$$

(3) Déduire de (2) l'identité

$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

(4) Calculer $J(1/2, 1/2)$ en posant $u = \sin^2\theta$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

(5) Déduire de (4) la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de (re-)calculer la transformée de Fourier de la gaussienne; autrement dit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n := \int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2/2} dt$.

  (a) Justifier l'existence de I_n.

  (b) Calculer I_0. (*On peut par exemple utiliser la dernière question de l'Exercice 1; mais toute méthode correcte est acceptable*).

  (c) Expliquer pourquoi $I_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

  (d) Trouver une relation entre I_{2k} et I_{2k-2} et en en déduire que $I_{2k} = \frac{\sqrt{2\pi}\,(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}$ pour tout $k \geq 1$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.