

## Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1.** Montrer que pour tout  $N \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6};$$

et en déduire que pour tout  $b > 0$ , on a  $\int_0^b t^2 dt = \frac{b^3}{3}$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $M = \sup\{|f'(t)|; t \in [a, b]\}$ .

(1) Montrer que si  $u, v \in [a, b]$  et  $u < v$ , alors

$$\int_u^v |f(t) - f(u)| dt \leq M \frac{(v-u)^2}{2}.$$

(2) En déduire que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{S} = ((J_0, t_0), \dots, (J_{N-1}, t_{N-1}))$  de  $[a, b]$  où  $t_k$  est la borne de gauche de  $J_k$  pour  $k = 0, \dots, N-1$ , on a

$$\left| R(f, \mathcal{S}) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{N-1} |J_k|^2.$$

(3) Conclure que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\left| R(f, \underline{\mathcal{S}}_n) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

**Exercice 3.** Utiliser l'Exercice 2 pour donner une valeur approchée de  $\ln(3)$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 4.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{s_k + s_{k+1}}{2}\right), \quad \text{où } s_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

(1) Justifier que  $S_n \rightarrow \int_a^b f(t) dt$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

(2) On pose  $M = \sup\{|f''(s)|; s \in [a, b]\}$ .

- (a) Montrer que pour tout  $m \in [a, b]$ , on peut trouver une fonction *affine*  $\alpha$  telle que

$$\alpha(m) = f(m) \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b] : |f(t) - \alpha(t)| \leq M \frac{(t - m)^2}{2}.$$

- (b) Soient  $u, v \in [a, b]$  avec  $u < v$ , et soit  $m = \frac{u+v}{2}$ . Montrer que pour toute fonction affine  $\alpha$ , on a

$$\int_u^v \alpha(t) dt = (v - u) \alpha(m).$$

- (c) Dédurre de (a) et (b) que pour tous  $u < v$  dans  $[a, b]$ , on a

$$\left| \int_u^v f(t) dt - (v - u) f\left(\frac{u+v}{2}\right) \right| \leq M \frac{(v - u)^3}{24}.$$

- (3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\left| S_n - \int_a^b f(t) dt \right| \leq M \frac{(b - a)^3}{24n^2}.$$

**Exercice 5.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent et trouver leurs limites.

**Exercice 6.** Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$  avec  $p < q$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \frac{1}{pn} + \frac{1}{pn+1} + \cdots + \frac{1}{qn}.$$

- (1) Vérifier que  $u_n = \sum_{k=0}^{(q-p)n} \frac{1}{pn+k}$ .

- (2) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et trouver sa limite.

**Exercice 7.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}$ .

- (1) Vérifier que  $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$ .

- (2) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et trouver sa limite.

**Exercice 8.** Déterminer, si elle existe, la limite de  $u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k + n)^{1/n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 9.** Soit  $\alpha > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ . Montrer qu'il existe deux constantes  $C$  et  $\beta$  à déterminer telle que  $S_n$  est équivalent à  $C n^\beta$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 10.** Soit  $u, v > 0$  et  $\alpha > 1$ . Montrer qu'il existe des constantes  $C$  et  $\beta$  à déterminer telles que  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(nu+kv)^\alpha}$  est équivalent à  $\frac{C}{n^\beta}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 11.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n};$$

et en déduire qu'on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

**Exercice 12.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en 0, avec  $f(0) = 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right).$$

- (1) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  donné, on peut trouver un entier  $N$  tel que : pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$(f'(0) - \varepsilon) \frac{n}{n^2+k^2} \leq f\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) \leq (f'(0) + \varepsilon) \frac{n}{n^2+k^2}.$$

- (2) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et trouver sa limite.

**Exercice 13.** Le but de l'exercice est de calculer, pour  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, \infty[$ , l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt.$$

- (1) Justifier l'existence de  $I(x)$  pour tout  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, \infty[$ .  
 (2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Expliquer pourquoi on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = x^n - 1.$$

- (3) En utilisant (2) et des sommes de Riemann, déterminer la valeur de  $I(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$ .

- (4) Établir l'identité  $I(1/x) = I(x) - 2\pi \ln(x)$ , et en déduire la valeur de  $I(x)$  pour  $x > 1$ .

**Exercice 14.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$ .

- (1) Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ .
- (2) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$  (par exemple en posant  $x = \cos^2 t$ , ou bien en remarquant que  $x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$  et en faisant un dessin).
- (3) Montrer à l'aide des questions précédentes et en utilisant des sommes de Riemann que la suite  $(u_n)$  converge, et déterminer sa limite.

**Exercice 15.** Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- (1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right) |\sin u| du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{x+k\pi}{n}\right) \sin x dx. \end{aligned}$$

- (2) En utilisant le fait que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \left[ f\left(\frac{x+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right] \sin x dx \right| \leq \frac{C}{n}.$$

- (3) Montrer qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt.$$