Feuille d'exercices n^o 2

Exercice 1. Soient $a, b > 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$.

Exercice 2. Déterminer les primitives de $f(x) := xe^{3x}$ et $g(x) := x^2\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $(\cos x)^n \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $b = \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{4x^3-5x^2+10x-21}{x^4-x^3-x^2-5x+6}$ (là où elles existent).

Exercice 6. Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_0^X \frac{dt}{1+t^3}$ quand $X \to \infty$.

Exercice 7. Calculer $I := \int_0^1 (t^2+t+1)e^{3t}dt$ et $J := (3t^2 - t + 2)\sin(2t)\,dt$.

Exercice 8. Soient $a, b > 0$. Calculer $\int_0^x \cos(at)e^{bt}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en effectuant 2 intégrations par parties.

Exercice 9. Calculer $I := \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^3}$ en supposant connue la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ et en intégrant par parties.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Montrer que $I(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda\phi(t)}dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$. (*Intégrer par parties en écrivant* $f(t)e^{-i\lambda\phi(t)} = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times \phi'(t)e^{-i\lambda\phi(t)}$.)

Exercice 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N} \;:\; f^{(k)}(a) = 0 = f^{(k)}(b)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \to \pm\infty$.

Exercice 12. Soit $\lambda > 0$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite de $\int_0^X t^n e^{-t/\lambda}dt$ quand $X \to \infty$ (si cette limite existe).

Exercice 13. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}\cdot$

Exercice 14. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\, dt\,.$$

En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, alors

$$\int_a^b P(t)\, dt = \frac{b-a}{2}\,(P(a) + P(b));$$

et interpréter géométriquement ce résultat lorsque $P \geq 0$ sur $[a,b]$.

Exercice 15. Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12}\,(f'(1) - f'(0)) + \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(t^2 - t + \frac{1}{6}\Big)\, f''(t)\, dt\,.$$

En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \frac{1}{2}\,(P(0) + P(1)) - \frac{1}{12}\,(P'(1) - P'(0)).$$

Exercice 16. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$ et $\int_a^b f^2 = 1$. Montrer que $\int_a^b t\, f(t) f'(t) = -\frac{1}{2}\cdot$

Exercice 17. Calculer $I := \int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Exercice 18. Calculer $I := \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ en posant $x = \tan t$.

Exercice 19. Calculer $I := \int_0^1 \frac{e^{2t}+1}{e^t+1}\,dt$.

Exercice 20. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$.

Exercice 21. Calculer $I(\lambda) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda} \frac{dt}{\sin t}$ pour tout $\lambda \in]0,\pi[$.

Exercice 22. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,dt$ en posant $x = \cos t$.

Exercice 23. Calculer $I := \int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 24. Soit $\alpha > 0$. Calculer $I(\lambda) := \int_1^{\lambda} \frac{dt}{t(1+t^{\alpha})}$ pour tout $\lambda > 0$, en posant $x = t^{\alpha}$.

Exercice 25. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone. Le but de l'exercice est de montrer que la formule de changement de variable $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$ est valable pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $J = \phi([a,b])$. (La subtilité est que f n'est pas nécessairement continue.) Dans ce qui suit, on supposera que ϕ est strictement croissante, de sorte que $J = [\phi(a), \phi(b)]$. On rappelle aussi que ϕ est une *bijection* de $[a,b]$ sur J.

(1) Soit u une fonction *en escalier* sur $[\phi(a), \phi(b)]$, et soit $(x_0, \dots, x_N)$ une subdivision de $[\phi(a), \phi(b)]$ adaptée à u, avec $u(x) \equiv \alpha_k$ sur $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \le k \le N-1$. Déterminer explicitement $v(t) := u(\phi(t))\phi'(t)$ en introduisant les points $t_k := \phi^{-1}(x_k)$. En déduire que v est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et qu'on a $\int_a^b v(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(x)\,dx$.

(2) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux suites (v_n) et $(\widetilde{v}_n)$ de fonctions (R)-intégrables sur $[a,b]$ telles que $v_n \le g \le \widetilde{v}_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\widetilde{v}_n - v_n) = 0$. Montrer que g est (R)-intégrable sur $[a,b]$ avec $\int_a^b g = \lim_{n\to\infty} v_n$.

(3) Montrer que si f est une fonction (R)-intégrable sur $[\phi(a), \phi(b)]$, alors la fonction $t \mapsto f(\phi(t))\phi'(t)$ est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et la formule de changement de variable est valable.

Exercice 26. Soit $b > 0$. Montrer que si $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction (R)-intégrable et *impaire*, alors $\int_{-b}^b f(t)\,dt = 0$.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *périodique* de période $R > 0$. On suppose que f est (R)-intégrable sur tout intervalle $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que si $[u, v]$ est un intervalle de longueur T, alors $\int_u^v f = \int_0^T f$.

Exercice 28. Montrer que pour tout nombre réel $u \neq -1$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u^n = \frac{1}{1+u} + (-1)^N \frac{u^{N+1}}{1+u} \cdot$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)\,.$$

Exercice 29. En raisonnant comme dans l'Exercice 28, montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on peut écrire

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,\cdot$$

Exercice 30. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot$$

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe une constante C et une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ :\ |f^{(k)}(t)| \leq C^k k!\, \alpha(t)\,.$$

Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right[$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\,.$$

Exercice 32. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose qu'on a $f'(0) = f''(0) = 0$ et $|f'''(t)| \leq 1 + t^2$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $|f(\varepsilon) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon^5}{60}$.

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe des constantes M_0 et M_2 telles que $\forall s \in \mathbb{R}\ :\ |f(s)| \leq M_0$ et $|f''(s)| \leq M_2$.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $h \in \mathbb{R}$, majorer $|f(t+h) - f(t) - hf'(t)|$ à l'aide de M_2, et en déduire que $\forall h > 0\ :\ |f'(t)| \leq \frac{M_2}{2}\, h + 2\, \frac{M_0}{h}$.
(2) Montrer qu'on a $|f'(t)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 34. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(a) = 0 = f'(b)$. On pose $M := \sup\{|f''(t)|;\ t \in [a,b]\}$.

(1) Pour $x \in [a,b]$, majorer $|f(x) - f(a)|$ et $|f(x) - f(b)|$ à l'aide de M.
(2) Montrer qu'on a $|f(b) - f(a)| \leq M\, \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 35. Soit $a > 0$.

(1) Étudier $\varphi(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sur $]0, \infty[$.
(2) Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
(3) Placer x_1, x_2, x_3 sur une figure, puis montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.
(4) Calculer $\varphi'(\sqrt{a})$, puis montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange qu'on a $|\varphi(x) - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(x - \sqrt{a})^2$ pour tout $x \geq \sqrt{a}$.
(5) On suppose que $a \geq 1/4$ et $x_0 \geq \sqrt{a}$ Montrer qu'on a $|x_n - \sqrt{a}| \leq (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(6) Dans cette question, on prend $a = 2$ et $x_0 := 3/2$. Comment suffit-il de choisir n pour avoir $|x_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}$? (*Observer que* $\sqrt{2} \geq 1,4$.)

Exercice 36. Soit $a > 0$, et soit k un entier au moins égal à 2.

(1) Étudier $\varphi(x) := \left(1 - \frac{1}{k}\right) x + \frac{a}{kx^{k-1}}$ sur $]0, \infty[$.
(2) Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence
$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}.$$
Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.
(3) En raisonnant comme dans l'Exercice 35 (question (4)), montrer qu'on a
$$|\varphi(x) - a^{1/k}| \leq \frac{k-1}{2}\, a^{-1/k}\,(x - a^{1/k})^2 \qquad \text{pour tout } x \geq a^{1/k}.$$

(4) On pose $c := \frac{k-1}{2}\, a^{-1/k}$. Montrer que si $x_0 \geq a^{1/k}$, alors

$$|x_n - a^{1/k}| \leq \frac{1}{c}\,\big(c(x_0 - a)\big)^{2^n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$