L1 Analyse 2

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Montrer que si $\widetilde{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifie $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ pour tout t sauf un nombre fini, alors $\widetilde{\varphi}$ est en escalier.

Exercice 2. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$, alors $F \circ \varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 3. Montrer qu'une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement si elle est de la forme $\varphi = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \, \mathbf{1}_{I_j}$, où les I_j sont des intervalles et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. (*Ne pas oublier que les singletons sont des intervalles.*)

Exercice 4. Montrer que si φ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors $\varphi\psi$ est en escalier.

Exercice 5. Si φ et ψ sont des fonctions sur $[a, b]$, on note $\varphi \vee \psi$ et $\phi \wedge \psi$ les fonctions définies par $\varphi \vee \psi\,(t) = \max\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ et $\varphi \wedge \psi\,(t) = \min\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$. Montrer que si φ et ψ sont en escalier, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont en escalier.

Exercice 6. Soient $\varphi, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{E}([a, b])$. Montrer que si on a $\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t)$ pour tout t sauf un nombre fini, alors $\int_a^b \varphi = \int_a^b \widetilde{\varphi}$.

Exercice 7. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$, alors $\left| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right| dt \leq \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$.

Exercice 8. *Montrer* qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $\forall t \in [a, b] \ : \ C_1 \leq f(t) \leq C_2$.

Exercice 9. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, déterminer *sans faire aucun calcul* les valeurs de $I_1 := \int_1^2 t\, dt$, $I_2 := \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$ et $I_3 := \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$, et soit $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer que si $\widetilde{f}(t) = f(t)$ pour tout t sauf un nombre fini, alors $\widetilde{f} \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b \widetilde{f} = \int_a^b f$.

Exercice 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier φ et $\mathbf{e}$ telles que $|f - \varphi| \leq \mathbf{e}$ et $\int_a^b \mathbf{e} < \varepsilon$. Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 12. Montrer que si $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des nombres réels tels que $\alpha_1 \leq \beta_1$ et $\alpha_2 \leq \beta_2$, alors $\max(\beta_1, \beta_2) - \max(\alpha_1, \alpha_2) \leq (\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2)$ et $\min(\beta_1, \beta_2) - \min(\alpha_1, \alpha_2) \leq (\beta_1 - \alpha_1) + (\beta_2 - \alpha_2)$. En déduire que si f et g sont deux fonctions (R)-intégrables sur $[a,b]$, alors les fonctions $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont (R)-intégrables. (*Voir l'Exercice 5 pour la définition de $f \vee g$ et $f \wedge g$.*)

Exercice 13. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, exprimer $|\alpha|$ à l'aide de $\alpha^+ := \max(\alpha, 0)$ et de $\alpha^- := \min(\alpha, 0)$. En déduire, en utilisant l'Exercice 12, une preuve du fait que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est (R)-intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ est (R)-intégrable.

Exercice 14. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f est (R)-intégrable sur tout intervalle $[u,v]$ où $a < u \leq v < b$.

(1) Soit $\eta > 0$ tel que $a + \eta \leq b - \eta$, et soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a + \eta, b]$. Soit également $M \geq 0$. On définit deux fonctions en escalier $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : [a,b] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\widetilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } a + \eta \leq t \leq b - \eta \\ -M & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\psi}(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{si } a + \eta \leq t \leq b - \eta \\ M & \text{sinon} \end{cases}$$

Majorer $\int_a^b (\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi})$ en fonction de $\int_{a+\eta}^{b-\eta} (\psi - \varphi)$, de M et de η.

(2) Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 15. Démontrer la linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 16. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable à valeurs complexes. Le but de l'exercice est de *montrer* que la fonction $|f|$ est (R)-intégrable.

(1) Soient $u := \mathrm{Re}(f)$ et $v := \mathrm{Im}(f)$. Montrer que si $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ sont des fonctions en escalier telles que $\varphi_1 \leq u \leq \psi_1$ et $\varphi_2 \leq v \leq \psi_2$ et si on pose $\phi := \varphi_1 + i\varphi_2$ alors

$$\big| |f| - |\phi| \big| \leq (\psi_1 - \varphi_1) + (\psi_2 - \varphi_2)\,.$$

(*On rappelle que pour tous nombres complexes z, z', on a $\big| |z| - |z'| \big| \leq |z - z'|$.*)

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant l'Exercice 11.

Exercice 17. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier (à valeurs complexes) telle que $\int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \varepsilon$.

Exercice 18. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable.

(1) On suppose que f est continue et qu'il existe un point $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Montrer qu'on peut trouver un intervalle non trivial $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ et une constante $\eta > 0$ tels que $|f(t)| \geq \eta$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.
(2) On suppose que f est continue. Montrer que si $\int_a^b |f(t)|\, dt = 0$, alors $f = 0$.
(3) Montrer que le résultat de (2) est faux si f n'est pas supposée continue.

Exercice 19. Le but de l'exercice est de montrer que si f et g sont deux fonctions (R)-intégrables sur $[a, b]$, alors la fonction fg est (R)-intégrable sur $[a, b]$.

(1) Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $u, \widetilde{u}, v, \widetilde{v}$ sont des fonctions en escalier telles que $0 \leq u \leq \widetilde{u} \leq M$ et $0 \leq v \leq \widetilde{v} \leq M$, alors
$$\int_a^b (\widetilde{u}\,\widetilde{v} - uv) \leq M \left(\int_a^b (\widetilde{u} - u) + \int_a^b (\widetilde{v} - v) \right).$$
(2) Déduire de (1) que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont (R)-intégrables et *positives*, alors fg est (R)-intégrable. Plus précisément, montrer qu'on peut trouver des suites approximantes $(u_n, \widetilde{u}_n)$ et $(v_n, \widetilde{v}_n)$ pour f et g respectivement, telles que $(u_n v_n, \widetilde{u}_n \widetilde{v}_n)$ soit une suite approximante pour fg.
(3) Démontrer le résultat souhaité pour des fonctions f et g à valeurs réelles, en utilisant l'Exercice 5. (*Commencer par exprimer f à l'aide de $f^+ := f \vee 0$ et $f^- := f \wedge 0$, et de même pour g.*)
(4) Démontrer le résultat souhaité pour des fonctions f et g à valeurs complexes.

Exercice 20. Le but de l'exercice est de montrer que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions (R)-intégrables positives, alors
$$\int_a^b fg \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}\,.$$
Ce résultat s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** pour les intégrales.

(1) Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.
(2) Soient f, g deux fonctions positives et (R)-intégrables sur $[a, b]$. En utilisant (1) avec $\alpha = \sqrt{\lambda}\, f(t)$ et $\beta = \frac{g(t)}{\sqrt{\lambda}}$, montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a
$$\int_a^b fg \leq \frac{\lambda}{2} \int_a^b f^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^b g.$$

(3) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 21. Le but de l'exercice est de donner une autre preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales (Exercice 20).

(1) Montrer que si $x_0, \dots, x_{N-1}, y_0, \dots, y_N$ sont des nombres réels positifs, alors
$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2}\,.$$
(*Tout mettre au carré...*) Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes**.

(2) Déduire de (1) que si u et v sont des fonctions *en escalier* positives sur $[a, b]$, alors $\int_a^b uv \leq \sqrt{\int_a^b u^2} \times \sqrt{\int_a^b v^2}$.

(3) Démontrer le résultat souhaité. (*Utiliser la question 2 de l'Exercice 19.*).

Exercice 22. Pour toute fonction (R)-intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, on définit une fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt$. (*Cette intégrale a bien un sens en vertu de l'Exercice 19.*) Le but de l'exercice est de montrer que $\widehat{f}(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour toute $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Ce résultat s'appelle le **lemme de Riemann-Lebesgue**.

(1) Montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai pour toute fonction f *en escalier*.

(2) Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{R}([a, b])$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{u}(\lambda)| \leq \int_a^b |u(t)|\, dt$.

(3) Soit f une fonction (R)-intégrable sur $[a, b]$, et soit $\varepsilon > 0$. En utilisant (2) l'Exercice 17, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier telle que
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ : \ |\widehat{f}(\lambda)| \leq |\widehat{\varphi}(\lambda)| + \varepsilon\,.$$

(4) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction (R)-intégrable f générale.

Exercice 23. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable. Montrer que pour tous $u, v \in [a, b]$, on a $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\, dt\right|$. (*Noter qu'on ne suppose pas que $u \leq v$.*)

Exercice 24. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0) := 0$ et $F(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que F est dérivable en tout point mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Montrer que f ne possède pas de primitive.

Exercice 26. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_{a,n} := \int_0^\pi e^{at} \sin(nt)\, dt$.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On pose $g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 28. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\int_a^b |f(t)|\, dt = 0$. Montrer que la fonction F définie par $F(x) := \int_a^x |f(t)|\, dt$ est identiquement nulle, et en déduire que $f = 0$.

Exercice 29. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) := \int_0^x \sin(x - t) f(t)\, dt\,.$$

Montrer que ϕ est solution de l'équation différentielle $\phi'' + \phi = f$.

Exercice 30. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Pour $x > 0$, on pose $g(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que la fonction g est croissante.

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} f(t)\, dt$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 32. Soient a, b vérifiant $0 < a < b$. Écrire $\ln(b) - \ln(a)$ sous forme d'une intégrale, et en déduire l'inégalité

$$\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b - a}{\sqrt{ab}} \cdot$$

(*Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz; voir l'Exercice 20.*)

Exercice 33. Montrer que $\forall x > 0\ :\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0\ :$ $\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice 34. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \int_0^x \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exercice 35. Soit $F :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \cdot$$

(1) Montrer que $\forall u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ : \ F(\sin u) = u$. (*Pour cette raison, F s'appelle la* ***fonction arcsinus****.*)
(2) Déterminer, si elles existent, les limites de $F(x)$ et de $F'(x)$ quand x tend vers ± 1.
(3) Tracer le graphe de la fonction F.

Exercice 36. Montrer que si x, y vérifient $0 \leq x \leq y$ alors $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$; et en déduire que $f(t) := \sqrt{t}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 37. Montrer que si $t \in \mathbb{R}^+$ et $\delta > 0$, alors $(t+\delta)^2 - t^2 \geq 2t\delta$; et en déduire que $f(t) := t^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 38. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement fermé). Montrer que toute fonction uniformément continue sur I est bornée.

Exercice 39. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A > 0$ tel que $\forall s > A \ : |f(s) - f(A)| < \varepsilon$.
(2) Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 40. Montrer qu'une fonction croissante sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ possède une limite à gauche et à droite en tout point.

Exercice 41. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$. Montrer que F est dérivable à gauche et à droite en tout point.

Exercice 42. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$.

(1) Soient $u, v \in I$ avec $u \leq v$, et $\lambda \in [0,1]$. On pose $z_\lambda := (1-\lambda)u + \lambda v$. Vérifier que $u \leq z_\lambda \leq v$ et qu'on a
$$F(z_\lambda) - \big((1-\lambda)F(u) + \lambda F(v)\big) = (1-\lambda) \int_u^{z_\lambda} f - \lambda \int_{z_\lambda}^v f\,.$$

(2) Montrer que pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a
$$F\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)\,.$$
(*Une fonction F vérifiant cette propriété est dite **convexe**.*)

Exercice 43. Montrer qu'une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si et seulement si elle ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité. Trouver ensuite une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui soit croissante mais pas continue par morceaux.

Exercice 44. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité. Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$. (*Utiliser l'exercice 14.*)

Exercice 45. Trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui soit bornée avec un seul point de discontinuité, mais pas continue par morceaux.

Exercice 46. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $P(x)$ une propriété dépendant de $x \in [a,b]$. On suppose que

- $P(a)$ est vraie;
- si $P(z)$ est vraie pour tout $z < x$, alors $P(x)$ est vraie
- si $x < b$ et si $P(x)$ est vraie, alors on peut trouver $\delta > 0$ tel que $P(z)$ est vraie pour tout z vérifiant $x \leq z < x + \delta$.

Le but de l'exercice est de montrer que $P(b)$ est vraie.

(1) On pose $c := \sup\{x \in [a,b];\ P(x)$ est vraie pour tout $z < x\}$. Montrer que c est bien défini et que $P(c)$ est vraie.
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 47. Le but de l'exercice est de donner une preuve de l'intégrabilité des fonctions continues différente de celle vue en cours. On fixe donc une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on peut trouver $\delta > 0$ et deux constantes α et β telles que $\alpha \leq f \leq \beta$ sur $[a,b] \cap [x-\delta, x+\delta]$ et $\beta - \alpha < \varepsilon$.
(2) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $P_\varepsilon(x)$ la propriété dépendant de $x \in [a,b]$ définie comme suit : $P_\varepsilon(x)$ est vraie si et seulement si il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,x]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[a,x]$ et $\psi(t) - \varphi(t) < \varepsilon$ pour tout $t \in [a,x]$. En utilisant (1) et l'exercice 46, montrer que $P_\varepsilon(b)$ est vraie.
(3) Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 48. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Le but de l'exercice est de donner une preuve que f est uniformément continue différente de celle donnée en cours.

(1) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $P_\varepsilon(x)$ la propriété dépendant de $x \in [a,b]$ définie comme suit : $P_\varepsilon(x)$ est vraie si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ pour tout $u, v \in [a,x]$ vérifiant $|v-u| < \delta$. En utilisant l'exercice 46, montrer que $P_\varepsilon(b)$ est vraie.
(2) Conclure.

Exercice 49. Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème des valeurs intermédiaires basée sur l'Exercice 46.

(1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a) > 0$ et que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer que $f(b) > 0$ en considérant la propriété $P(x)$ suivante : $P(x)$ est vraie si et seulement si $f(t) > 0$ pour tout $t \in [a,x]$.
(2) Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 50. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer *à l'aide de l'Exercice 46* (en considérant une propriété $P(x)$ convenable) que f est bornée sur $[a,b]$.