Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Analyse 2*

Examen du 17 Juin 2016

Durée : 2h

Exercice 1. Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+3)}$ sur $]1, \infty[$.

Exercice 2. Soient $a, b > 0$. Calculer $I(x) = \int_0^x e^{at} \cos(bt) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de deux façons différentes :

(i) en effectuant 2 intégrations par parties;
(ii) en écrivant que $\cos(bt)$ est la partie réelle de e^{ibt}.

Exercice 3. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2+\cos t} dt$ en posant $x = \tan(\frac{t}{2})$, et $J = \int_1^8 \frac{dt}{1+t^{1/3}}$ en posant $x = t^{1/3}$.

Exercice 4. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose qu'on a $f'(0) = f''(0) = 0$ et $|f'''(t)| \leq \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. En utilisant la formule de Taylor, montrer que $|f(\varepsilon) - f(0)| \leq \frac{8}{105} \varepsilon^{7/2}$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k \right)^{\frac{1}{n^2}}$.

(1) Vérifier que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln(n)$.
(2) En déduire la limite de $\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(n)$ quand $n \to \infty$.
(3) Conclure qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que

$$u_n \sim C\sqrt{n} \qquad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par $f(t) = \ln(\ln t)$ est concave sur $]1, \infty[$, et en déduire que pour tous $x, y > 1$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}\,.$$