Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 11 Mai 2015

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qu'on écrit $f = u + iv$ avec u, v à valeurs réelles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $J_f(z)$ le déterminant jacobien de f au point z. Montrer que

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

(2) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!}\, z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 2} \left(1 - \frac{1}{\log(n)}\right)^{n^2} z^n\,.$$

(3) Montrer que si $K \subseteq \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors l'aire de K est donnée par les formules suivantes :

$$\text{aire}\,(K) = \frac{1}{2}\int_{\partial K} (xdy - ydx) = \frac{1}{2i}\int_{\partial K} \bar{z}\, dz\,.$$

(4) Déterminer le domaine de définition de $f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}$, puis le développement de Laurent de f dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

(5) Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < 1$, et soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Pour $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on pose $\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\cdot$ Calculer $|\varphi_a(\xi)|$ pour $\xi = e^{it} \in \partial\mathbb{D}$, et en déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(6) Soit f une fonction entière non constante. En appliquant le théorème de Liouville à une fonction de la forme $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ (pour un certain $w \in \mathbb{C}$) montrer par l'absurde que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

(7) Pour $r \in [0,1[$, on pose $I(r) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdot$ Écrire $I(r)$ sous la forme d'une intégrale curviligne $\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\,dz$, où $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, puis calculer $I(r)$.

(8) Déterminer le nombre de zéros de $P(z) := z^5 - 5z^4 - 15z^2 + 6z - 8$ dans le disque $D(0,3)$.

(9) Montrer que la formule $F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{itz}\, dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Calculer ensuite $F(iy)$ pour $y \in \mathbb{R}$, et en déduire que $F(z) = \sqrt{2\pi}\, e^{-z^2/2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(10) Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\forall u \in \mathbb{C}$: $\cos(u) = 1 + u^2 h(u)$; puis montrer que la formule $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{k}\right)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k = 0, \dots, n-1$, on pose $\omega_{k,n} := e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})}$.

(1) En considérant des demi-disques centrés en 0, montrer que si f est une fonction holomorphe au voisinage du demi-plan fermé $\overline{U} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et bornée sur $\overline{U}$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{1+t^{2n}}\, dt = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{k,n}\, f(\omega_{k,n})\,.$$

(2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^{2n}}\,.$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$, et soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$.

(1) Soit $g : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2z}.$$

Montrer que g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, qu'on notera encore g, et calculer $g(0)$.

(2) On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Montrer à l'aide du lemme de Schwarz que

$$\forall z \in \mathbb{D}\ :\ |f(z) + f(-z)| \leq 2\,|z|^2\,.$$

(3) On suppose toujours qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus, on suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $z_0 \neq 0$ et $|f(z_0) + f(-z_0)| = 2\,|z_0|^2$.

(a) En utilisant le "cas d'égalité" dans le lemme de Schwarz, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\omega| = 1$ et une fonction $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe et *impaire* ($h(-z) = -h(z)$) tels que

$$\forall z \in \mathbb{D}\ :\ f(z) = \omega z^2 + h(z)\,.$$

(b) Montrer que si $a \in \overline{\mathbb{D}}$, alors $\overline{D}(a,1) \cap \overline{D}(-a,1) \subseteq \overline{D}(0, \sqrt{1-|a|^2})$; et en déduire qu'on a $|h(\xi)|^2 \leq 1 - |\xi|^4$ pour tout $\xi \in \mathbb{D}$.
(c) Déduire de (b) que si $z \in \mathbb{D}$, alors $|h(z)| \leq \sqrt{1-r^4}$ pour tout r vérifiant $|z| < r < 1$.
(d) Conclure que $f(z) = \omega z^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Exercice 3. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, on pose $I_\alpha := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha \log x}{x^2-1}\, dx$.

(1) Justifier l'existence de I_α.
(2) Pour $0 < \varepsilon < 1/2 < 1 < R$, dessiner soigneusement le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\,,\ \varepsilon \leq |z| \leq R\ ,\ |z-1| \geq \varepsilon \text{ et } |z+1| \geq \varepsilon\}\,.$$

(3) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ et $z \neq \pm 1$, on pose $f(z) := \frac{z^\alpha \log z}{z^2-1}$, où $\log z$ et z^α sont calculés en prenant l'argument dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$.
  (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 1, et en déduire la limite de $\int_{\gamma_r} f(z)\, dz$ quand $r \to 0$, où $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin défini par $\gamma_r(t) = 1 + re^{it}$.
  (b) Justifier que pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a $f(-x) = e^{i\pi\alpha} f(x) + i\pi e^{i\pi\alpha} \frac{x^\alpha}{x^2-1}$.
  (c) En appliquant le théorème de Cauchy à f, montrer qu'il existe un nombre réel A tel que

$$(1 + e^{i\pi\alpha}) I_\alpha + i\pi e^{i\pi\alpha} A - \frac{\pi^2}{2} e^{i\pi\alpha} = 0\,.$$

(4) Déduire de (3b) la valeur de I_α en multipliant par $e^{-i\pi\alpha}$ et en prenant la partie réelle de l'identité obtenue.