Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 13 Mai 2015

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. En utilisant le critère de Cauchy, montrer que l'ensemble $B := \{x \in \Omega;\ \text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge dans } \mathbb{C}\}$ est mesurable.

(2) Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\int_\Omega |f|^\alpha \, d\mu < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n := \{x \in \Omega;\ |f(x)| \geq n\}$. En observant que $B_n = \{x \in \Omega;\ |f(x)|^\alpha \geq n^\alpha\}$, montrer que la série $\sum \mu(B_n)$ est convergente.

(3) Soit $\phi : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et positive tendant vers 6 à l'infini. Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_1^\infty \frac{\phi(t^n) e^{-t/n}}{t} \, dt$ quand $n \to \infty$.

(4) Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_0^\infty \arctan\left(\frac{\sin(t^n)}{t^n}\right) e^{-t-2^{-n}t^4} dt$ quand $n \to \infty$.

(5) Soit $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y - x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 9 - (x-5)^2\}$. Dessiner soigneusement $\mathcal{D}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_\mathcal{D} xy \, dxdy$.

(6) Soient f et g deux fonctions intégrables sur $]0, \infty[$. Montrer que pour presque tout $x \in]0, \infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} f(\frac{x}{t}) g(t)$ est intégrable sur $]0, \infty[$, et que la fonction (presque partout définie) $x \mapsto \int_0^\infty f(\frac{x}{t}) g(t) \frac{dt}{t}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

(7) Montrer que l'application $(t, s) \mapsto (u, v) := (t + s, \frac{t}{s})$ est un difféomorphisme de $\Omega :=]0, \infty[\times]0, \infty[$ sur Ω et déterminer sa réciproque. En déduire que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)} \cdot$$

(*Rappel* : la fonction Γ est définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.)

(8) Soit $\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{3}\, x\}$. Calculer l'intégrale $\int_\mathcal{D} (xy^2 + x^3) \, dxdy$ en utilisant les coordonnés polaires.

(9) Soit $\varphi : [1,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $[1,\infty[$. Montrer que la formule $f(x) := \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} \cos\left(\frac{t}{x}\right) dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(10) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $p > 1$ tel que $\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^p dt < \infty$. En utilisant convenablement le théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité de Hölder, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Calculer l'intégrale $I_k := \int_0^1 (-t\,\log(t))^k\, dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en commençant par poser $u = -\log(t)$. En déduire la formule

$$\int_0^1 t^{-t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}\,.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point.

(1) Justifier que la fonction f' est borélienne en considérant les fonctions

$$f_n(t) := 2^n\big(f(t + 2^{-n}) - f(t)\big)\,.$$

(2) On suppose que la fonction f' est *bornée* sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)\,.$$

(3) On suppose que la fonction f est croissante. Montrer en utilisant le lemme de Fatou qu'on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$$\int_a^b f'(t)\, dt \leq f(b) - f(a)\,.$$

(On a en fait égalité; mais c'est un peu plus délicat à démontrer.)

Exercice 3. Dans tout l'exercice $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

(1) Soit f une fonction *étagée* positive sur Ω, qu'on écrit

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et des A_i mesurables et deux à deux disjoints. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mu\big(\{f > t\}\big) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)\, \mathbf{1}_{[0,\alpha_i[}(t)\,.$$

(2) Soit $\phi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, positive, croissante et vérifiant $\phi(0) = 0$. Montrer que toute fonction mesurable positive f sur Ω, on a

$$\int_\Omega \phi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \phi'(t)\, \mu\big(\{f > t\}\big)\, dt\,.$$

(Commencer par le cas où la fonction f est étagée en utilisant (1).)

(3) Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que dans chacun des deux cas suivants, la fonction g est intégrable sur Ω.

(i) $\mu(\Omega) < \infty$ et il existe $\alpha > 1$ tel que $\mu\big(\{|g| > t\}\big) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \to \infty$.

(ii) g est bornée et il existe $\alpha < 1$ tel que $\mu\big(\{|g| > t\}\big) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. On suppose que $f(x)$ admet une limite $L \in \mathbb{R}$ quand $x \to a^+$.

(1) Montrer que pour tout $x \in]a, b]$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}$ est intégrable sur $]a, x[$.

(2) Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}\, dt = \int_0^1 \frac{f((1-u)a + ux)}{\sqrt{u(1-u)}}\, du\,.$$

(3) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}\, du$ en posant $u = \sin^2 t$.

(4) Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}\, dt$ quand $x \to a^+$.