M1 MEEF

"PROBLÈME ACCOMPAGNÉ"

1. Introduction

Le but du problème est de démontrer le résultat suivant, qu'on appelle l'"inégalité isopérimétrique".

Théorème. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ouvert borné dont la frontière* $\partial\Omega$ *est une courbe de Jordan régulière. On note* $l(\partial\Omega)$ *la longueur de la courbe* $\partial\Omega$. *Alors on a l'inégalité*

$$aire(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi}\, l(\partial\Omega)^2 \,,$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $\partial\Omega$ *est un cercle.*

Pour cela, il faudra d'abord définir proprement la longueur d'une courbe de Jordan fermée, expliquer ce qu'on entend par "courbe régulière", et démontrer quelques résultats préliminaires.

Dans tout le problème, on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

2. Intégrale vectorielle

Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, où $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. L'*intégrale* de ϕ sur $[a,b]$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini comme suit : si

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

alors

$$\int_a^b \phi(t)\, dt = \begin{pmatrix} \int_a^b \phi_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_a^b \phi_n(t)\, dt \end{pmatrix}$$

(2.1) On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\langle \xi, \int_a^b \phi(t)\, dt \right\rangle = \int_a^b \langle \xi, \phi(t) \rangle \, dt \,,$$

et en déduire

$$\left| \left\langle \xi, \int_a^b \phi(t)\, dt \right\rangle \right| \leq \|\xi\| \times \int_a^b \|\phi(t)\|\, dt \,.$$

(2.2) Montrer qu'on a

$$\left\| \int_a^b \phi(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|\phi(t)\|\, dt\,.$$

3. Longueur d'un arc paramétré

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est un arc paramétré (seulement supposé continu), on pose

$$l(\gamma) = \sup_{(t_0,\ldots,t_N)\in\Sigma} \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|\,,$$

où Σ désigne l'ensemble de toutes les subdivisions $(t_0,\ldots,t_N)$ de l'intervalle $[a,b]$. La borne supérieure est prise dans $[0,\infty]$.

(3.1) Soient p, q deux points du plan. Calculer $l(\gamma)$ pour l'arc $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma(t) = p + t\,\overrightarrow{pq}$.

(3.2) Démontrer la *relation de Chasles* : si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est un arc paramétré et si $c \in [a,b]$, alors

$$l(\gamma) = l(\gamma_{|[a,c]}) + l(\gamma_{|[c,d]})\,.$$

(3.3) Montrer que la longueur est *invariante par changement de paramètre*; en d'autres termes, que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arc paramétré et si $\theta : [c,d] \to [a,b]$ est un changement de paramètre, alors $l(\gamma) = l(\gamma \circ \theta)$.

(3.4) Le but de cette question est de montrer que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

(a) Montrer qu'on a $\|\gamma(v) - \gamma(u)\| \le \int_u^v \|\gamma'(t)\|\, dt$ pour tous $u, v \in [a,b]$ (avec $u \le v$), et en déduire l'inégalité $l(\gamma) \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$.

(b) Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $\mathbf{t} = (t_0,\ldots,t_N)$ est une subdivision de $[a,b]$, on pose $\delta(\mathbf{t}) = \max\limits_{0\le i\le N-1}(t_{i+1} - t_i)$ et

$$\omega(\phi,\mathbf{t}) = \sup\left\{ \|\phi(v) - \phi(u)\|;\ |v-u| \le \delta(\mathbf{t}) \right\}.$$

Montrer qu'on a

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t)\, dt - (t_{i+1} - t_i)\phi(t_i) \right\| \le (t_{i+1} - t_i)\, \omega(\phi,\mathbf{t})$$

pour tout $i \in \{0,\ldots,N-1\}$, et en déduire l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i)\, \|\phi(t_i)\| \le \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \phi(t)\, dt \right\| + (b-a)\, \omega(\phi,\mathbf{t})\,.$$

(c) Déduire de (b) qu'on a $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \leq l(\gamma)$, et conclure.

(3.5) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la longueur du chemin $\gamma_k : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma_k(t) = \big(a + R\cos(kt), b + R\sin(kt)\big)\,.$$

Interpréter le résultat trouvé.

4. Longueur d'une courbe de Jordan fermée

Dans cette partie, on se donne une courbe de Jordan fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. On appellera *paramétrage* de Γ tout arc paramétré $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ d'image Γ tel que γ est injectif sur $[a,b[$ et $\gamma(b) = \gamma(a)$.

(4.1) Montrer que si $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^2$ sont deux paramétrages de Γ tels que $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, alors il existe un changement de paramètre $\theta : [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$ tel que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \theta$.

(4.2) Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ. On note $\widehat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré $(b-a)$-périodique qui coïncide avec γ sur $[a,b]$. En utilisant la relation de Chasles, montrer que si $I, I' \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles compacts de longueur $b-a$, alors $l(\widehat{\gamma}_{|I}) = l(\widehat{\gamma}_{|I'})$.

(4.3) Déduire de (4.1) et (4.2) que si γ_1 et γ_2 sont deux paramétrages quelconques de Γ, alors $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$.

On peut donc définir la longueur de la courbe de Jordan Γ comme étant la longueur de *n'importe quel* paramétrage de Γ. On notera cette longueur $l(\Gamma)$.

5. Paramétrage par longueur d'arc

On dira qu'une courbe de Jordan fermée est *régulière* si elle admet un paramétrage $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Le but de cette partie est de montrer que si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe de Jordan régulière de classe $\mathcal{C}^1$ et si on pose $L = l(\Gamma)$, alors Γ admet un paramétrage $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall s \in [0,L] \ : \ \|\gamma'(s)\| = 1\,.$$

Un tel paramétrage s'appelle un *paramétrage par longueur d'arc* de la courbe Γ.

(5.1) Soit $\gamma_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ de Γ tel que $\|\gamma_0'(t)\| \neq 0$ pour tout t. Pour $t \in [a,b]$, on pose

$$\ell(t) = \int_a^t \|\gamma_0'(u)\|\,du\,.$$

Montrer que ℓ est un changement de paramètre de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer l'intervalle $I = \ell([a,b])$.

(5.2) Soit $\theta = \ell^{-1} : I \to [a,b]$. Pour $s = \ell(t) \in I$, exprimer $\theta'(s)$ à l'aide de $\|\gamma_0'(t)\|$.
(5.3) Démontrer le résultat souhaité.

6. Rappels

6.1. **Coefficients de Fourier et formule de Parseval.**

Soit $L > 0$. Si $f : [0,L] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, on définit ses coefficients de Fourier $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{L}\int_0^L f(s)\, e^{-in\frac{2\pi}{L}s}\, ds\,.$$

On sait qu'alors la série $\sum |c_n(f)|^2$ est convergente, et qu'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{L}\int_0^L |f(s)|^2 ds\,.$$

Plus généralement, si $f, g : [0,L] \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues, alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,\overline{c_n(g)} = \frac{1}{L}\int_0^L f(s)\,\overline{g(s)}\, ds\,.$$

6.2. **Aire d'un domaine entouré par une courbe.**

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan régulière. On *admettra* que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ de $\partial\Omega$, alors, en écrivant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, l'aire de Ω est donnée par la formule

$$\begin{aligned} aire(\Omega) &= \frac{1}{2}\left|\int_\gamma x\,dy - y\,dx\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\, dt\right|. \end{aligned}$$

Cette identité découle de la *formule de Green-Riemann*, qu'il n'est pas question de démontrer ici.

7. Inégalité isopérimétrique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné dont la frontière $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan fermée régulière de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $A = aire(\Omega)$ et $L = l(\partial\Omega)$. Enfin, on fixe un paramétrage par longueur d'arc $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ de la courbe $\partial\Omega$.

Dans ce qui suit, on identifie $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$. Ainsi, on considère γ comme une fonction de $[0,L]$ dans $\mathbb{C}$, et on écrit en conséquence

$$\gamma(s) = x(s) + iy(s)\,.$$

(7.1) Pourquoi a-t-on $L = \int_0^L |\gamma'(s)|^2 ds$?

(7.2) Montrer qu'on a

$$A = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_0^L \gamma'(s) \, \overline{\gamma(s)} \, ds \right).$$

(7.3) Exprimer les coefficients de Fourier de γ' en fonction de ceux de γ.

(7.4) Déduire des questions précédentes qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\frac{L^2}{4\pi} - A = \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n^2 - \varepsilon n) \, |c_n(\gamma)|^2 \, .$$

(7.5) Pour quels entiers n a-t-on $n^2 = \varepsilon n$?

(7.6) Démontrer l'inégalité isopérimétrique.