# Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 9

**Exercice 1.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier.

(1) Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - \tau_{\pi/x} f(t))\, e^{-ixt}\, dt\,.$$

(2) En déduire que $\widehat{f}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

**Exercice 2.** Montrer que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g) * h = f * (g * h)$.

**Exercice 3.** (inégalité de Young)

Soient $p, q$ des nombre réels tels que $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. On écrit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}\cdot$$

Le but de l'exercice est de montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est bien définie presque partout et appartient à $L^r(\mathbb{R})$, avec

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q\,.$$

(1) Montrer que si $u, v$ sont des fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\, dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} u^p(x-y)v^q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}} u^{\frac{r-p}{r-1}}(x-y)v^{\frac{r-q}{r-1}}(y)\, dy\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

(2) Montrer que $s = p\frac{r-1}{r-p}$ est supérieur à 1, et calculer l'exposant conjugué. En déduire que si $u, v$ sont des fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} u^{\frac{r-p}{r-1}}(x-y)v^{\frac{r-q}{r-1}}(y)\, dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} u^p(x-y)\, dy\right)^{\frac{r-p}{p(r-1)}} \left(\int_{\mathbb{R}} g^q(y)\, dy\right)^{\frac{r-q}{q(r-1)}}.$$

(3) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 4.** (test de Schur)

Dans tout l'exercice, $\Omega$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. Soit également $p \in ]1, \infty[$, et soit $q$ l'exposant conjugué. On suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive $w : \Omega \to \mathbb{R}$ et une constante $C < \infty$ telles que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

($\bullet$) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(y)^q\, dy \leq C\, w(x)^q$ pour tout $x \in \Omega$;
($*$) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)^p\, dx \leq C\, w(y)^p$ pour tout $y \in \Omega$.

(1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. En utilisant judicieusement l'inégalité de Hölder, montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a
$$\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, dy \leq C^{1/q}\, w(x) \left( \int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^p}{w(y)^p}\, dy \right)^{1/p}.$$
(2) Déduire de (1) que si $f \in L^p(\Omega)$, alors, pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $y \mapsto K(x,y)f(y)$ est intégrable sur $\Omega$, et la fonction $T_K f$ définie (presque partout) par
$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$
est dans $L^p(\Omega)$, avec $\|T_K f\|_p \leq C\, \|f\|_p$.

**Exercice 5.** Soit $p \in ]1, \infty[$. En utilisant le test de Schur (exercice 4), montrer si $f \in L^p(]0, \infty[)$, alors la formule
$$Tf(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\, dy$$
a un sens pour tout $x \in ]0, \infty[$, et que la fonction $Tf$ appartient à $L^p(]0, \infty[)$.

**Exercice 6.** Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $p \in ]1, \infty[$. Utiliser le test de Schur pour montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\varphi * f$ est bien définie presque partout et appartient à $L^p(\mathbb{R})$, avec $\|\varphi * f\|_p \leq \|\varphi\|_1\, \|f\|_p$ .

**Exercice 7.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $(a,b)$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$F_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \tau_{\alpha_{i,N}} f\,,$$
où $\alpha_{i,N} = a + i\frac{b-a}{N}$ et $\tau_\alpha f(x) = f(x-\alpha)$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$F_N(x) - \mathbf{1}_{(a,b)} * f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\alpha_{i,N}}^{\alpha_{i+1,N}} \left(\tau_{\alpha_{i,N}} f(x) - \tau_t f(x)\right) dt\,,$$

et en déduire l'inégalité

$$\|F_N - \mathbf{1}_{(a,b)} * f\|_{L^1} \leq N \int_0^{\frac{b-a}{N}} \|f - \tau_s f\|_{L^1} \, ds \,.$$

(2) Montrer que la suite $(F_N)$ converge en norme $L^1$ vers la fonction $\mathbf{1}_{(a,b)} * f$.

**Exercice 8.** (idéaux et translations)
Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{E}$ est **invariant par translations**, i.e. $\tau_\alpha f \in \mathcal{E}$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, où $\tau_\alpha f(x) = f(x - \alpha)$

(ii) $\mathcal{E}$ est un **idéal** de $L^1(\mathbb{R})$, i.e. $\varphi * f \in \mathcal{E}$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ et pour toute $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que si $f, \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(\tau_\alpha \varphi) * f = \varphi * (\tau_\alpha f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et en déduire que (ii) entraîne (i).

(2) On suppose que (i) est vérifiée.
  - (a) En utilisant l'exercice 7, montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors $\varphi * f \in \mathcal{E}$ pour toute fonction $\varphi$ en escalier.
  - (b) Montrer que (ii) est vérifiée.

**Exercice 9.** (Weierstrass par convolution)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n dt$. Montrer que pour tout $\delta \in ]0, 1]$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\alpha_n} \int_\delta^1 (1 - t^2)^n dt = 0 \,.$$

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$P_n f(x) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{-1}^{1} f(x - t)(1 - t^2)^n \, dt \,.$$

Montrer que les $P_n f$ sont polynomiales sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et convergent uniformément vers $f$ quand $n \to \infty$.

**Exercice 10.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $F(t) = \int_0^t f(s) \, ds$, et pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $\Delta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\Delta_\varepsilon(t) = \frac{F(t + \varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \,.$$

(1) Montrer qu'on a $\Delta_\varepsilon = p_\varepsilon * f$, où $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]}$.

(2) En déduire que $\Delta_\varepsilon$ tend vers $f$ en norme $L^1$ quand $\varepsilon \to 0$.

**Exercice 11.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. On suppose qu'on a $\int_I f(t)\,dt = 0$ pour tout intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 10, montrer que $f(x) = 0$ presque partout.

**Exercice 12.** (problème de la chaleur)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue $2\pi$-périodique, le *problème de la chaleur* associé à $f$, noté $(\mathcal{P})_f$, consiste à trouver une fonction $u : [0, \infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est $2\pi$-périodique;
(P2) $u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et y vérifie l'*équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,;$$

(P3) $u$ est continue sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}$;
(P4) $u(0,x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On veut montrer ici que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue $2\pi$-périodique, le problème $(\mathcal{P})_f$ admet une unique solution.

(1) Pour $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\lambda x} dx$.
(2) Soit $\alpha > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-2n\pi)^2}\ .$$

  (a) Justifier la définition, puis montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $2\pi$-périodique.
  (b) Calculer les coefficients de Fourier de $\varphi$.

(3) Pour $t > 0$, on définit $G_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$G_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}\ .$$

  (a) En utilisant (2), montrer qu'on a également

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}}\ .$$

  (b) Montrer que la famille $(G_t)_{t>0}$ vérifie les propriétés suivantes :
    (i) $G_t \geq 0$;
    (ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_t(x)\,dx = 1$;
    (iii) $\forall \delta > 0 \quad \displaystyle\lim_{t\to 0} \left(\sup_{\delta\leq|x|\leq\pi} G_t(x)\right) = 0$.

(4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue $2\pi$-périodique. On note $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $f$, et on définit $u : [0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $u(0,x) = f(x)$ et

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{-n^2t}e^{inx} \quad \text{pour } t > 0.$$

(a) Justifier la définition, et montrer que pour $t > 0$, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_t(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G_t(y)f(x-y)\,dy\ .$$

(b) Montrer que $u$ est solution du problème de la chaleur associé à $f$.

(5) Soit $v : [0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (P1), (P2) et (P3).

(a) Pour $t \geq 0$, on pose

$$E(t) = \int_0^{2\pi} v(t,x)^2 dx\ .$$

Montrer que la fonction $E$ est décroissante sur $[0,\infty[$.

(b) En déduire que si $v(0,x) = 0$ pour tout $x \in [0,2\pi]$, alors $v = 0$.

(6) Conclure.

**Exercice 13.** Existe-t-il une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall g \in L^1(\mathbb{R})\ :\ f * g = g$?

**Exercice 14.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-t^{13}}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = -e^{-t^{46}}$ si $t < 0$. La transformée de Fourier de $f$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

**Exercice 15.** (formule sommatoire de Poisson)
Dans tout l'exercice, $f$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$

(1) Montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi n)$ est absolument convergente, et que la fonction $f_{\mathrm{per}}$ définie (presque partout) par

$$f_{\mathrm{per}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+2\pi n)$$

est intégrable sur $[0,2\pi]$.

(2) Montrer que la fonction $f_{\mathrm{per}}$ est $2\pi$-périodique, et exprimer ses coefficients de Fourier à l'aide de la transformée de Fourier de $f$.

(3) On suppose que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et qu'on a $|f(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $|t|$ tend vers l'infini. Montrer qu'on peut écrire

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} f(2\pi n)\,.$$

Cette formule s'appelle la **formule sommatoire de Poisson**.

**Exercice 16.** Pour $s > 0$, on pose $\theta(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s n^2}$. En utilisant la formule sommatoire de Poisson (exercice 15) montrer que la fonction $\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right) .$$

**Exercice 17.** (espace de Schwartz)
On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \ : \ f^{(n)}(x) = o\left(\frac{1}{|x|^k}\right) \quad \text{quand } x \to \pm\infty\,.$$

(1) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(2) Montrer l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Exercice 18.** Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(1) Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $f^{(12)} + f^{(8)} + f = g$.
(2) Qu'en est-il en général pour une équation différentielle du type $\sum_0^n a_i f^{(i)} = g$?

**Exercice 19.** (séries lacunaires nulle part dérivables)
Dans tout l'exercice, $\lambda = (\lambda_n)$ est une suite strictement croissante de réels positifs, et $\alpha = (\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes vérifiant $\sum_0^\infty |\alpha_n| < +\infty$. On définit une fonction $W = W_{\lambda,\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, e^{i\lambda_n t} .$$

(1) Montrer que $W$ est bien définie, et continue bornée sur $\mathbb{R}$.
(2) Donner une condition suffisante simple (portant sur $\lambda$ et $\alpha$) pour que $W$ soit de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans toute la suite, on suppose que la suite $\lambda$ est "lacunaire", ce qui signifie qu'il existe une constante $c > 1$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c\,.$$

On veut montrer que si $\lambda_n \alpha_n$ ne tend pas vers 0, alors la fonction $W$ n'est dérivable en aucun point.

(3) Montrer que si $W$ est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire

$$W(t) = a + b(t - t_0) + (t - t_0)g(t - t_0) ,$$

où $a, b$ sont des constantes et $g$ est une fonction continue bornée vérifiant $g(0) = 0$.

(4) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $]1/c, c[$, et vérifie $\widehat{\varphi}(1) = 1$.
(5) Calculer $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt$ et $\int_{\mathbb{R}} t\varphi(t)\, dt$ après avoir justifié l'existence de la deuxième intégrale.
(6) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\, \varphi(\lambda_k(t_0 - t))\, dt\ .$$

  (a) Justifier la définition de $I_k$ et calculer $I_k$ en fonction de $\alpha_k$, $\lambda_k$ et $t_0$.
  (b) Montrer que si $W$ est dérivable en $t_0$, alors $I_k = o(1/\lambda_k^2)$ quand $k$ tend vers l'infini.

(7) Conclure.

**Exercice 20.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^{2ix} - 1|^2 = 4 \sin^4 x + \sin^2(2x)$. En déduire, en considérant la fonction $f = \mathbf{1}_{[0,2]}$, la valeur de l'intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx$.

**Exercice 21.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f' \in L^1 \cap L^2$. Montrer que $\widehat{f} \in L^1$.

**Exercice 22.** (principe d'incertitude)

(1) On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz (cf l'exercice 17), et on définit deux applications linéaires $A, B : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par

$$Au = iu' \quad \text{et} \quad Bu(t) = tu(t)\,.$$

  (a) Montrer qu'on a $AB - BA = i\, Id$.
  (b) Montrer que $A$ et $B$ sont "autoadjoints" relativement au produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$; autrement dit, que si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle Au, v \rangle_{L^2} = \langle u, Av \rangle_{L^2}\ ,$$

  et de même pour $B$.
  (c) Déduire de (a) et (b) que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\|u\|_{L^2}^2 = 2\, \mathrm{Im}\, \langle Bu, Au \rangle_{L^2}\ .$$

(2) Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on note $tu$ la fonction $t \mapsto tu(t)$ et $x\widehat{u}$ la fonction $x \mapsto x\widehat{u}(x)$. Montrer qu'on a

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ :\ \|tu\|_2\, \|x\widehat{u}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \|u\|_2^2\,.$$