

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient p, q tels que $1 \leq p < q < \infty$.

- (1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints, et soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Soit également $r \in [1, \infty[$. A quelle condition la fonction $f = \sum_0^\infty \alpha_n \mathbf{1}_{A_n}$ appartient-elle à L^r ?
- (2) On suppose qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints tels que $\varepsilon_0 \leq \mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^q$ qui n'appartient pas à L^p .
- (3) On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints tels que $\mu(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^p$ qui n'appartient pas à L^q .

Exercice 2. Soit $p \in [1, \infty]$. Trouver une fonction f telle que $f \in L^p(]0, \infty[)$ mais f n'appartient à aucun L^q pour $q \neq p$.

Exercice 3. Trouver une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ qui ne soit pas bornée.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction mesurable sur Ω . Montrer que si $f \in L^1 \cap L^\infty$, alors $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe deux constante $a < \infty$ et $c > 0$ telle que

$$\forall t > 0 : \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > t\}) \leq a e^{-ct}.$$

Montrer que $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^1 . On suppose que (f_n) converge presque partout vers une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

- (1) Montrer que si (f_n) est bornée dans L^1 , alors $f \in L^1$ et $\|f\|_1 \leq \underline{\lim} \|f_n\|_1$.
- (2) En appliquant le théorème de convergence dominée à $g_n = |f_n - f| - (|f_n| - |f|)$, montrer que si $f \in L^1$ et si $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$, alors $f_n \rightarrow f$ en norme L^1 .
- (3) Montrer qu'on peut avoir $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ sans que (f_n) converge vers f pour la norme L^1 .

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [1, \infty[$. Soit également (f_n) une suite de fonctions de L^p . On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f , et que (f_n) est bornée dans L^p . Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut écrire, quand $n \rightarrow \infty$:

$$\|f_n\|_p^p = \|f\|_p^p + \|f_n - f\|_p^p + o(1).$$

- (1) Montrer que $f \in L^p$.
- (2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon < \infty$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : (1+t)^p \leq 1 + \varepsilon + C_\varepsilon t^p.$$

Montrer ensuite qu'on a $(a+b)^p \leq (1+\varepsilon)a^p + C_\varepsilon b^p$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, puis que

$$\forall u, v \in \mathbb{C} : \left| |u+v|^p - |u|^p \right| \leq \varepsilon |u|^p + C_\varepsilon |v|^p.$$

- (3) On écrit $f_n = g_n + f$, et pour $\varepsilon > 0$ on pose

$$G_{n,\varepsilon} = \left(\left| |g_n + f|^p - |g_n|^p - |f|^p \right| - \varepsilon |g_n|^p \right)^+.$$

Montrer à l'aide de (2) et du théorème de convergence dominée qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_{n,\varepsilon} d\mu = 0.$$

- (4) Dédire de (3) qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right| d\mu = 0,$$

et conclure.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [1, \infty]$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{f \in L^p; |f(x)| \leq 1 \text{ presque partout}\}$ est fermé dans L^p .

Exercice 9. (1ère inégalité de Clarkson)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [2, \infty[$. Le but de l'exercice est de montrer que pour toutes fonctions $f, g \in L^p$, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

- (1) Montrer que dans le cas $p = 2$, on a même égalité.
- (2) Montrer que la fonction $\varphi(t) = (t^2 + 1)^{p/2} - t^p - 1$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , et en déduire que

$$\forall \alpha, \beta \geq 0 : \alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}.$$

(3) Déduire de (1) et de la convexité de la fonction $t \mapsto t^{p/2}$ que

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p).$$

(4) Conclure.

Exercice 10. (inégalité de Hanner)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in]1, \infty[$. Soient également $f, g \in L^p$ à valeurs réelles. Le but de l'exercice est de montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p &\geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p & \text{si } p \leq 2, \\ \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p & \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(1) Pour $r \in]0, 1]$, on pose

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \quad \text{et} \quad \beta(r) = [(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] r^{1-p}.$$

(a) Soit $c \in]0, 1]$. Montrer que $\phi_c(r) = \alpha(r) + \beta(r) c^p$ admet un maximum en $r = c$ si $p \leq 2$, et un minimum en $r = c$ si $p \geq 2$.

(b) Montrer qu'on a $\beta(r) \leq \alpha(r)$ si $p \leq 2$ et $\beta(r) \geq \alpha(r)$ si $p \geq 2$.

(c) Déduire de (a) et (b) que si $c \in]0, 1]$, alors on a pour tout $r \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \alpha(r) + \beta(r) c^p &\leq \alpha(r) c^p + \beta(r) & \text{si } p \leq 2, \\ \alpha(r) + \beta(r) c^p &\geq \alpha(r) c^p + \beta(r) & \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(2) Montrer que si $A, B \in \mathbb{R}$, alors on a pour tout $r \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \alpha(r) |A|^p + \beta(r) |B|^p &\leq |A+B|^p + |A-B|^p & \text{si } p \leq 2, \\ \alpha(r) |A|^p + \beta(r) |B|^p &\geq |A+B|^p + |A-B|^p & \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(3) On suppose $g \neq 0$ et on pose $c = \|g\|_p$, de sorte que $c \in]0, 1]$. Déduire de (2) qu'on a pour tout $r \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p &\geq \alpha(r) + \beta(r) c^p & \text{si } p \leq 2, \\ \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p &\leq \alpha(r) + \beta(r) c^p & \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(4) Démontrer le résultat souhait e.

(5) Pour $p = 2$, montrer directement qu'on a

$$\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 + (\|f\|_2 - \|g\|_2)^2.$$

Exercice 11. (uniforme convexité de L^p)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [2, \infty[$. En utilisant au choix l'exercice 10 ou l'exercice 9, montrer que si (f_n) et (g_n) sont deux suites dans L^p telles que $\|f_n\|_p, \|g_n\|_p$ et $\left\| \frac{f_n + g_n}{2} \right\|_p$ convergent vers la même limite, alors $\|f_n - g_n\|_p \rightarrow 0$.

Exercice 12. (projection sur un convexe fermé)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [2, \infty[$. Soit également C une partie convexe fermée (non vide) de L^p , et soit $u \in L^p$. On pose

$$d = \text{dist}(u, C) = \inf \{ \|\phi - u\|_p; \phi \in C \}.$$

- (1) Soit (ϕ_n) une suite quelconque d'éléments de C telle que $\|\phi_n - u\|_p \rightarrow d$.
 - (a) Montrer que $\|\frac{\phi_k + \phi_l}{2} - u\|_p \rightarrow d$ quand $k, l \rightarrow \infty$.
 - (b) En déduire, à l'aide de l'exercice 11, que la suite (ϕ_n) est de Cauchy dans L^p .
- (2) Montrer qu'il existe une unique $\phi \in C$ telle que $\|\phi - u\|_p = \text{dist}(u, C)$.

Exercice 13. (dérivées directionnelles de la norme)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in]1, \infty[$. Soient également $f, h \in L^p$ à valeurs réelles. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$N(t) = \|f + th\|_p.$$

- (1) Montrer que la fonction $\varphi(x) = |x|^p$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $\varphi'(x)$.
- (2) Montrer que si $t \in [0, 1]$, alors

$$(1+t)|f|^p - t|f-h|^p \leq |f+th|^p \leq t|f+h|^p + (1-t)|f|^p.$$

- (3) Montrer que la fonction N est dérivable en 0, avec

$$N'(0) = \int_{\Omega} p|f|^{p-2} f h d\mu.$$

Exercice 14. (Hölder entraîne Minkowski)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient f et g deux fonctions mesurables positives sur Ω . Soit également $p \in]1, \infty[$. En observant que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1}$$

pour tout $x \in \Omega$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'inégalité de Minkowski $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Exercice 15. (inégalité de Jensen)

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que pour tout $t_0 \in I$, on peut trouver une fonction affine $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $a(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\forall t \in I : a(t) \leq \varphi(t)$.

- (2) Montrer que si $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$, et si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable telle que $f(\Omega) \subset I$ et telle que $\varphi \circ f$ est intégrable, alors $\int_{\Omega} f d\mu \in I$ et

$$\varphi \left(\int_{\Omega} f d\mu \right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu.$$

Exercice 16. Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Jensen (exercice 15) montrer que si $x_1, \dots, x_N \in I$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des réels positifs tels que $\sum_1^N \lambda_i = 1$, alors

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(x_i).$$

Exercice 17. Montrer qu'on peut déduire l'inégalité de Hölder de l'inégalité de Jensen.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 19. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit F une fonction mesurable strictement positive sur Ω . On pose

$$J = \{t \in [1, \infty[; F \in L^t\}.$$

- (1) En utilisant l'exercice 18, montrer que J est un intervalle.
- (2) Montrer que la fonction $t \mapsto \log(\|F\|_t^t)$ est convexe sur J .

Exercice 20. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Montrer que pour toute $f \in L^\infty$, on a $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$.

Exercice 21. Montrer que la fonction $\log(\Gamma)$ est convexe sur $(0, \infty)$ en utilisant uniquement la définition de la convexité et l'inégalité de Hölder.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que si $f' \in L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $p > 1$, alors f est uniformément continue.

Exercice 23. (inégalité de Wirtinger)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 0 = f(1)$.

- (1) Montrer que $I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt$ et $I_2 = \int_0^1 f(t)^2(1 + \cotan^2(\pi t)) dt$ existent, et qu'on a $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$.

(2) En déduire l'inégalité suivante :

$$\|f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \|f'\|_{L^2}.$$

Exercice 24. (splines)

Dans tout le problème, $\sigma = (x_0, \dots, x_N)$ est une subdivision d'un intervalle $[a, b]$. On note \mathcal{S}_σ l'ensemble des fonctions $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré au plus 3. Les fonctions de \mathcal{S}_σ s'appellent des **splines d'ordre 3**.

(1) Le but de cette question est d'établir le résultat suivant : si $y_0, \dots, y_N, y'_0, y'_N$ sont $N+3$ réels donnés, alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifiant $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $\varphi'(a) = y'_0$ et $\varphi'(b) = y'_N$.

(a) Montrer que \mathcal{S}_σ est un espace vectoriel de degré $N+3$.

(b) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifie $\varphi(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{0; \dots; n\}$, alors

$$\int_a^b \varphi''(t)^2 dt = \varphi'(b)\varphi''(b) - \varphi'(a)\varphi''(a).$$

On pourra commencer par vérifier qu'on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'(t)\varphi'''(t) dt = 0$ pour tout $i < N$.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

(2) Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $g(0) = 0 = g(1)$. Montrer qu'on a $\|g\|_\infty \leq \|g''\|_{L^2}$.

(3) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et soit φ l'unique fonction de \mathcal{S}_σ vérifiant $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout i , $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = f'(b)$. Le but de cette question est de montrer qu'on a

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq C \|f''\|_{L^2} h_\sigma^{3/2},$$

où $h_\sigma = \max\{x_{i+1} - x_i; 0 \leq i < N\}$ est le pas de la subdivision σ .

(a) Montrer qu'on a

$$\|f''\|_{L^2}^2 = \|(f - \varphi)''\|_{L^2}^2 + \|\varphi''\|_{L^2}^2.$$

On pourra intégrer $(f'' - \varphi'')\varphi''$ par parties sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

(b) Montrer que pour tout $i \in \{0; \dots; n-1\}$, on a

$$\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} |(f - \varphi)(t)| \leq \|(f - \varphi)''\|_{L^2} h_i^{3/2},$$

où on a posé $h_i = x_{i+1} - x_i$.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 25. (“principe de dualité”)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{M}^+(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives sur Ω . Soit également $p \in [1, \infty]$, et soit q l'exposant conjugué.

(1) Montrer que si $F \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ est dans L^p , alors

$$(*) \quad \|F\|_p = \sup \left\{ \int_X FG \, d\mu; G \in \mathcal{M}^+(\Omega), \|G\|_q = 1 \right\}.$$

Pour l'une des deux inégalités, on pourra considérer $G = \frac{F^{p/q}}{\|F\|_p^{p/q}}$.

(2) Dans cette question, on suppose qu'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables (Ω_n) telle que $\mu(\Omega_n) < \infty$ pour tout n et $\Omega = \bigcup_0^\infty \Omega_n$. Le but de la question est de montrer que $(*)$ est valable pour toute $F \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, même si F n'est pas dans L^p .

(a) Soit $F \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathbf{1}_{A_n} F$, où $A_n = \Omega_n \cap \{x \in \Omega; F(x) \leq n\}$. Montrer que $F_n \in L^p$.

(b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 26. (forme intégrale de Minkowski)

Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} , et soit Φ une fonction borélienne positive sur $I \times J$. Soit également $p \in [1, \infty]$. Pour tout $t \in J$, on note $\Phi(\cdot, s)$ la fonction $I \ni x \mapsto \Phi(x, s)$; et on note $\int_J \Phi(\cdot, s) \, ds$ la fonction $I \ni x \mapsto \int_J \Phi(x, s) \, ds$. En utilisant le “principe de dualité” (exercice 25), montrer qu'on a

$$\left\| \int_J \Phi(\cdot, s) \, ds \right\|_p \leq \int_J \|\Phi(\cdot, s)\|_p \, ds.$$

Exercice 27. (inégalité de Hardy)

Soit $p \in]1, \infty[$. Si $f \in L^p(]0, \infty[)$, on définit une fonction $Tf :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ par

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt.$$

(1) Justifier la définition, et vérifier que $Tf(x) = \int_0^1 f(sx) \, ds$.

(2) En utilisant l'exercice 26, montrer que $Tf \in L^p$, avec

$$\|Tf\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}.$$

(3) La question précédente montre que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p . En considérant des fonctions f de la forme $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, montrer que la norme de T est exactement égale à $\frac{p}{p-1}$.

Exercice 28. Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *en escalier* si elle nulle en dehors d'un intervalle compact $[a, b]$ et en escalier au sens usuel sur $[a, b]$. Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 29. (Riemann-Lebesgue)

Montrer que l'application (linéaire) $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En déduire, *en utilisant l'exercice 28*, que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 30. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une partition \mathcal{P}_n de Ω en un nombre fini d'ensembles mesurables. Pour toute $f \in L^1$, on définit une fonction $T_n f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$T_n f = \sum_{I \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{|I|} \left(\int_I f d\mu \right) \mathbf{1}_I.$$

- (1) Montrer que $T_n f \in L^1$ pour toute $f \in L^1$, et que l'application (linéaire) $T_n : L^1 \rightarrow L^1$ est continue, avec $\|T_n\| \leq 1$.
- (2) Dans cette question, on suppose que Ω est un compact de \mathbb{R}^d , que μ est la mesure de Lebesgue, et que $\delta_n := \sup \{|I|; I \in \mathcal{P}_n\}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.
 - (a) Montrer que si f est une fonction continue sur Ω , alors $T_n f \rightarrow f$ uniformément.
 - (b) Montrer que $T_n f \rightarrow f$ en norme L^1 pour toute $f \in L^1$.