

Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Calculer l'intégrale $J = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{x+y}$.

Exercice 2. Calculer $J = \int_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 y}$, où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$.

Exercice 3. Soit $a > 0$, et soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$. Calculer l'intégrale $J = \int_{\Omega} e^{2x+y} dx dy$.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$. Calculer $J = \int_{\Omega} x^3 y z^2 dx dy dz$.

Exercice 5. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{e^{-y} \sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}$ est intégrable sur $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[$, et calculer $J = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$.

Exercice 6. Soient, $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R, h) \subset \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des (x, y) . Calculer le volume de $\mathcal{C}(R, h)$.

Exercice 7. Soit $R > 0$. On pose $B(R) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2\}$. Calculer $\lambda_4(B(R))$.

Exercice 8. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^2 . Pour $r > 0$, on note D_r le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon r dans \mathbb{R}^2 , et on pose

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \int_{D_r} f(x, y) dx dy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(r) dr = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

Exercice 9. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

- (1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in I \times I$.
- (2) En déduire, en considérant $\int_{I \times I} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy$, qu'on a

$$\int_I f g \geq \left(\int_I f \right) \times \left(\int_I g \right).$$

Exercice 10. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^d , et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 nulle en 0. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x)) dx = \int_0^\infty \varphi'(t) \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d; f(x) > t\}) dt.$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne, et soit G_f le graphe de f . Montrer que $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 12. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^2 . On suppose que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0$. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0$.

Exercice 13. (produit de convolution)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction (presque partout définie) $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Exercice 14. Le but de l'exercice est (encore!) de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$. Calculer l'intégrale "itérée" $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx$.
- (2) Calculer J .

Exercice 15. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (1) Effectuer le changement de variable $x = 1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx$, et en déduire qu'on a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (2) Pour $y > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2}$.

- (3) Soit $x \in]0, 1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2 \frac{\log(x)}{x^2 - 1}.$$

- (4) Calculer J en utilisant (2) et (3).

Exercice 16. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt.$$

- (1) Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^3$, et soit $g = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$g(x, y, t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}.$$

Montrer qu'on a

$$J = \int_\Omega g(x, y, t) dx dy dt.$$

- (2) Vérifier que pour $(x, y, t) \in \Omega$ tel que $x \neq y$, on a

$$g(x, y, t) = \frac{1}{x^2 - y^2} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2} \right).$$

- (3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_\Omega g(x, y, t) dx dy dt = \frac{\pi}{2} \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{x + y}.$$

- (4) Calculer J .

Exercice 17. Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu} du \right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt.$$

Exercice 18. En considérant l'intégrale double $\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 19. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

(1) Soit $y > 0$ fixé.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(2x)e^{-yx}$ est intégrable sur $]0, \infty[$ et qu'on a

$$\int_0^{\infty} \cos(2x) e^{-yx} dx = \frac{y}{y^2 + 4}.$$

(b) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, en déduire que

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x e^{-yx} dx = \frac{2}{y(y^2 + 4)}.$$

(2) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x, y) = y \sin^2 x e^{-xy}$. En utilisant (1b), calculer l'intégrale "itérée"

$$J' = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

(3) Calculer J .

Exercice 20. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(1) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$.

(a) Montrer que f est intégrable sur $]0, A[\times]0, \infty[$ pour tout $A > 0$, et qu'on a

$$\int_{]0, A[\times]0, \infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

(b) Montrer que pour $A > 0$ et $y > 0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x, y) dx = \frac{1}{1 + y^2} - \cos A \frac{e^{-yA}}{1 + y^2} - \sin A \frac{ye^{-yA}}{1 + y^2}.$$

(2) Déduire de (1) que $J = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée, et calculer J .

Exercice 21. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$.

(1) Dessiner le domaine Ω .

(2) En intégrant en coordonnées polaires, déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω .

Exercice 22. Calculer l'intégrale "itérée" $I = \int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx$.

Exercice 23. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R} . En utilisant le changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} f(x - y) e^{-(x+y)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-|v|} dv.$$

Exercice 24. On veut calculer l'intégrale $J = \int_{]0, 1[\times]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2}$.

- (1) Soit $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u + v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right).$$

On admet que Φ est une bijection de Ω sur le carré $\Omega' =]0, 1[\times]0, 1[$. Montrer que Φ est un difféomorphisme.

- (2) Calculer J en posant $(x, y) = \Phi(u, v)$.

Exercice 25. On veut calculer l'intégrale $J = \int_{]0, 1[\times]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - xy}$.

- (1) En utilisant le changement de variables $(u, v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0, 1[\times]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - xy} = 2 \int_C \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2},$$

où C est le carré de sommets $(0, 0)$, $(1/2, -1/2)$, $(1, 0)$ et $(1/2, 1/2)$.

- (2) On pose $C_+ = \{(u, v) \in C; v \geq 0\}$ et $I = \int_{C_+} \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2}$.

(a) Montrer qu'on a

$$J = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

(b) Calculer les deux intégrales précédentes en posant $u = \sin t$ dans la première et $u = \cos(2t)$ dans la deuxième.

- (3) Calculer J .

Exercice 26. Utiliser l'exercice 25 pour calculer la somme $S = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 27. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

- (1) Pour $r \in [0, 1[$, exprimer $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ à l'aide de r et des coefficients a_n .

(2) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x + iy)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

Exercice 28. Pour $a, b, c > 0$, on pose

$$\mathcal{E}(a, b, c) = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

- (1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1, 1, 1)$?
- (2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a, b, c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 29. On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\forall s > 0 : \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

- (1) Soit $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u, v) = \left(\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u} \right)$ est un difféomorphisme de Ω sur Ω .
- (2) En déduire que pour tout $s \in]0, 1[$, on a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{x}{y} \right)^s e^{-(x+y)} \frac{dx dy}{x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

- (3) Déduire de (2) que pour tout $s \in]0, 1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

- (4) Calculer l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (3).
- (5) Déduire de (4) la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 30. Pour $s > 0$, on pose comme d'habitude

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt;$$

et pour $a, b > 0$, on pose

$$J(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du.$$

- (1) Soit $\mathcal{D} =]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u, t) = (ut, (1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0, 1[\times]0, \infty[$ sur \mathcal{D} .

- (2) En déduire que pour $a, b > 0$ et pour toute fonction positive $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dx dy = J(a, b) \int_0^\infty t^{a+b-1}f(t) dt.$$

- (3) Déduire de (2) l'identité

$$J(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

- (4) En posant $u = \sin^2 \theta$, montrer qu'on a

$$J(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2a-1}(\cos \theta)^{2b-1}d\theta.$$

- (5) Calculer $J(1/2, 1/2)$ puis $\Gamma(1/2)$.

Exercice 31. (volume de la boule)

Dans tout l'exercice on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d , et \mathbb{B}_d la "boule unité" de \mathbb{R}^d , i.e. $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1\}$. On pose $V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$. Le but de l'exercice est d'établir la formule

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}.$$

- (1) Vérifier que la formule est correcte pour $d = 1, 2, 3$.
 (2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t} dt$.
 (3) Pour $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \|x\|^2 \leq t\}$ et $V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t))$.
 (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \dots dx_d = \int_0^\infty e^{-t} V(t) dt.$$

- (b) Montrer qu'on a $V(t) = t^{d/2} V_d$ pour tout $t > 0$.
 (c) En déduire la formule

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \dots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) V_d.$$

- (4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 32. (intégration d'une fonction radiale)

On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Pour $r > 0$, on pose $V_d(r) = \lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$, où $\mathbb{B}_d(r) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| < r\}$.

- (1) Montrer qu'on a $V_d(r) = r^d V_d(1)$.
 (2) Soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive de classe \mathcal{C}^1 , décroissante et tendant vers 0 à l'infini.
 (a) Montrer que pour tout $u \in [0, \infty[$, on peut écrire $\varphi(u) = - \int_u^\infty \varphi'(t) dt$.

(b) En déduire l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = - \int_0^\infty \varphi'(r) V_d(r) dr.$$

(c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = d V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r) dr.$$

Exercice 33. (centre de gravité)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien borné tel que $\lambda_d(\Omega) > 0$. Le **centre de gravité** de Ω est le point $g_\Omega \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\overrightarrow{Og_\Omega} = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_{\Omega} \overrightarrow{Ox} d\lambda_d(x).$$

- (1) Justifier la définition.
- (2) Montrer que g_Ω est l'unique point $g \in \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\int_A \overrightarrow{gx} d\lambda_d(x) = 0.$$

- (3) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une bijection affine telle que $\Phi(\Omega) = \Omega$, alors $\Phi(g_\Omega) = g_\Omega$.
- (4) Dans cette question, on prend $d = 2$. Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle ou un triangle, alors g_Ω est ce à quoi on s'attend.