

## Feuille d'exercices n° 7

**Exercice 1.** Calculer l'intégrale  $J = \int_{]0,1[ \times ]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}$ .

**Exercice 2.** Calculer  $J = \int_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2y}$ , où  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$ .

**Exercice 3.** Soit  $a > 0$ , et soit  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$ . Calculer l'intégrale  $J = \int_{\Omega} e^{2x+y} dxdy$ .

**Exercice 4.** Soit  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$ . Calculer  $J = \int_{\Omega} x^3 y z^2 dxdydz$ .

**Exercice 5.** Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{e^{-y} \sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}$  est intégrable sur  $\Omega = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ , et calculer  $J = \int_{\Omega} f(x, y) dxdy$ .

**Exercice 6.** Soient,  $R, h > 0$ , et soit  $\mathcal{C}(R, h) \subset \mathbb{R}^3$  le cône de hauteur  $h$  basé sur le disque de centre 0 et de rayon  $R$  situé dans le plan des  $(x, y)$ . Calculer le volume de  $\mathcal{C}(R, h)$ .

**Exercice 7.** Soit  $R > 0$ . On pose  $B(R) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2\}$ . Calculer  $\lambda_4(B(R))$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  une fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $r > 0$ , on note  $D_r$  le disque de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et on pose

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \int_{D_r} f(x, y) dxdy.$$

Montrer qu'on a  $\int_0^\infty g(r) dr = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$ .

**Exercice 9.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions croissantes sur un intervalle  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ .

- (1) Montrer qu'on a  $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$  pour tout  $(x, y) \in I \times I$ .
- (2) En déduire, en considérant  $\int_{I \times I} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dxdy$ , qu'on a

$$\int_I fg \geq \left( \int_I f \right) \times \left( \int_I g \right).$$

**Exercice 10.** Soit  $f$  une fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction croissante de classe  $\mathcal{C}^1$  nulle en 0. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x)) dx = \int_0^\infty \varphi'(t) \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d; f(x) > t\}) dt.$$

**Exercice 11.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne, et soit  $G_f$  le graphe de  $f$ . Montrer que  $\lambda_2(G_f) = 0$ .

**Exercice 12.** Soit  $f$  une fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0$ . Montrer que pour presque tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0$ .

**Exercice 13.** (produit de convolution)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

est bien défini pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , et que la fonction (presque partout définie)  $f * g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14.** Le but de l'exercice est (encore!) de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

- (1) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$ . Calculer l'intégrale "itérée"  $\int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx$ .
- (2) Calculer  $J$ .

**Exercice 15.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (1) Effectuer le changement de variable  $x = 1/u$  dans l'intégrale  $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx$ , et en déduire qu'on a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (2) Pour  $y > 0$  fixé, calculer  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2}$ .

- (3) Soit  $x \in ]0, 1[$ . Déterminer une primitive de la fonction  $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$  en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2 \frac{\log(x)}{x^2 - 1}.$$

- (4) Calculer  $J$  en utilisant (2) et (3).

**Exercice 16.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left( \frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt.$$

- (1) Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}^3$ , et soit  $g = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  la fonction définie par

$$g(x, y, t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}.$$

Montrer qu'on a

$$J = \int_\Omega g(x, y, t) dx dy dt.$$

- (2) Vérifier que pour  $(x, y, t) \in \Omega$  tel que  $x \neq y$ , on a

$$g(x, y, t) = \frac{1}{x^2 - y^2} \left( \frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2} \right).$$

- (3) Calculer les intégrales  $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$  et  $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$  (pour  $x$  et  $y$  fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_\Omega g(x, y, t) dx dy dt = \frac{\pi}{2} \int_{]0,1[ \times ]0,1[} \frac{dx dy}{x + y}.$$

- (4) Calculer  $J$ .

**Exercice 17.** Soient  $\alpha, \beta$  vérifiant  $0 < \alpha < \beta$ . En calculant de deux façons l'intégrale double  $\int_0^\infty \left( \int_\alpha^\beta e^{-tu} du \right) dt$ , déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt.$$

**Exercice 18.** En considérant l'intégrale double  $\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$ , déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2} dt.$$

**Exercice 19.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

(1) Soit  $y > 0$  fixé.

(a) Montrer que la fonction  $x \mapsto \cos(2x)e^{-yx}$  est intégrable sur  $]0, \infty[$  et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(2x) e^{-yx} dx = \frac{y}{y^2 + 4}.$$

(b) En utilisant l'identité  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ , en déduire que

$$\int_0^\infty \sin^2 x e^{-yx} dx = \frac{2}{y(y^2 + 4)}.$$

(2) Soit  $f : ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  la fonction définie par  $f(x, y) = y \sin^2 x e^{-xy}$ . En utilisant (1b), calculer l'intégrale "itérée"

$$J' = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy.$$

(3) Calculer  $J$ .

**Exercice 20.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

(1) Soit  $f : ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ .

(a) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $]0, A[ \times ]0, \infty[$  pour tout  $A > 0$ , et qu'on a

$$\int_{]0, A[ \times ]0, \infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

(b) Montrer que pour  $A > 0$  et  $y > 0$  fixé, on a

$$\int_0^A f(x, y) dx = \frac{1}{1 + y^2} - \cos A \frac{e^{-yA}}{1 + y^2} - \sin A \frac{ye^{-yA}}{1 + y^2}.$$

(2) Déduire de (1) que  $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  existe en tant qu'intégrale généralisée, et calculer  $J$ .

**Exercice 21.** Soit  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ .

(1) Dessiner le domaine  $\Omega$ .

(2) En intégrant en coordonnées polaires, déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha > 0$  la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$  est intégrable sur  $\Omega$ .

**Exercice 22.** Calculer l'intégrale "itérée"  $I = \int_{-1}^0 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx$ .

**Exercice 23.** Soit  $f$  une fonction borélienne positive sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant le changement de variable  $(u, v) = (x + y, x - y)$ , montrer qu'on a

$$\int_{]0, \infty[ \times ]0, \infty[} f(x - y) e^{-(x+y)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-|v|} dv.$$

**Exercice 24.** On veut calculer l'intégrale  $J = \int_{]0, 1[ \times ]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2}$ .

- (1) Soit  $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u + v < \pi/2\}$  et soit  $\Phi = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par

$$\Phi(u, v) = \left( \frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right).$$

On admet que  $\Phi$  est une bijection de  $\Omega$  sur le carré  $\Omega' = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . Montrer que  $\Phi$  est un difféomorphisme.

- (2) Calculer  $J$  en posant  $(x, y) = \Phi(u, v)$ .

**Exercice 25.** On veut calculer l'intégrale  $J = \int_{]0, 1[ \times ]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - xy}$ .

- (1) En utilisant le changement de variables  $(u, v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$ , montrer qu'on a

$$\int_{]0, 1[ \times ]0, 1[} \frac{dx dy}{1 - xy} = 2 \int_C \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2},$$

où  $C$  est le carré de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1/2, -1/2)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1/2, 1/2)$ .

- (2) On pose  $C_+ = \{(u, v) \in C; v \geq 0\}$  et  $I = \int_{C_+} \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2}$ .

(a) Montrer qu'on a

$$J = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

(b) Calculer les deux intégrales précédentes en posant  $u = \sin t$  dans la première et  $u = \cos(2t)$  dans la deuxième.

- (3) Calculer  $J$ .

**Exercice 26.** Utiliser l'exercice 25 pour calculer la somme  $S = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ .

**Exercice 27.** Soit  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  une fonction holomorphe dans le disque unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .

- (1) Pour  $r \in [0, 1[$ , exprimer  $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$  à l'aide de  $r$  et des coefficients  $a_n$ .

(2) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x + iy)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=0}^N \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

**Exercice 28.** Pour  $a, b, c > 0$ , on pose

$$\mathcal{E}(a, b, c) = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

- (1) Quel est le volume de  $\mathcal{E}(1, 1, 1)$ ?
- (2) Calculer le volume de  $\mathcal{E}(a, b, c)$  en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

**Exercice 29.** On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\forall s > 0 : \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

- (1) Soit  $\Omega = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}^2$ . Montrer que l'application  $\Phi$  définie par  $\Phi(u, v) = \left( \frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u} \right)$  est un difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\Omega$ .
- (2) En déduire que pour tout  $s \in ]0, 1[$ , on a

$$\int_{\Omega} \left( \frac{x}{y} \right)^s e^{-(x+y)} \frac{dx dy}{x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

- (3) Déduire de (2) que pour tout  $s \in ]0, 1[$ , on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

- (4) Calculer l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)}$  à l'aide du changement de variable  $x = \sqrt{u}$ , et en déduire la valeur de  $\Gamma(1/2)$  en utilisant (3).
- (5) Déduire de (4) la valeur de l'intégrale  $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ .

**Exercice 30.** Pour  $s > 0$ , on pose comme d'habitude

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt;$$

et pour  $a, b > 0$ , on pose

$$J(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du.$$

- (1) Soit  $\mathcal{D} = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}^2$ . Montrer que l'application  $\Phi$  définie par  $\Phi(u, t) = (ut, (1-u)t)$  est un difféomorphisme de  $]0, 1[ \times ]0, \infty[$  sur  $\mathcal{D}$ .

- (2) En déduire que pour  $a, b > 0$  et pour toute fonction positive  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dxdy = J(a,b) \int_0^\infty t^{a+b-1}f(t)dt.$$

- (3) Déduire de (2) l'identité

$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

- (4) En posant  $u = \sin^2 \theta$ , montrer qu'on a

$$J(a,b) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2a-1}(\cos \theta)^{2b-1}d\theta.$$

- (5) Calculer  $J(1/2, 1/2)$  puis  $\Gamma(1/2)$ .

**Exercice 31.** (volume de la boule)

Dans tout l'exercice on note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ , et  $\mathbb{B}_d$  la "boule unité" de  $\mathbb{R}^d$ , i.e.  $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1\}$ . On pose  $V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$ . Le but de l'exercice est d'établir la formule

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}.$$

- (1) Vérifier que la formule est correcte pour  $d = 1, 2, 3$ .  
 (2) Pour  $\lambda \geq 0$ , calculer l'intégrale  $\int_\lambda^\infty e^{-t}dt$ .  
 (3) Pour  $t > 0$ , on pose  $\mathbb{B}(t) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \|x\|^2 \leq t\}$  et  $V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t))$ .  
 (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \dots dx_d = \int_0^\infty e^{-t} V(t) dt.$$

- (b) Montrer qu'on a  $V(t) = t^{d/2}V_d$  pour tout  $t > 0$ .  
 (c) En déduire la formule

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \dots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) V_d.$$

- (4) Démontrer la formule souhaitée.

**Exercice 32.** (intégration d'une fonction radiale)

On note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $r > 0$ , on pose  $V_d(r) = \lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$ , où  $\mathbb{B}_d(r) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| < r\}$ .

- (1) Montrer qu'on a  $V_d(r) = r^d V_d(1)$ .  
 (2) Soit  $\varphi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante et tendant vers 0 à l'infini.  
 (a) Montrer que pour tout  $u \in [0, \infty[$ , on peut écrire  $\varphi(u) = - \int_u^\infty \varphi'(t) dt$ .

(b) En déduire l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = - \int_0^\infty \varphi'(r) V_d(r) dr.$$

(c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = d V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r) dr.$$

**Exercice 33.** (centre de gravité)

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble borélien borné tel que  $\lambda_d(\Omega) > 0$ . Le **centre de gravité** de  $\Omega$  est le point  $g_\Omega \in \mathbb{R}^d$  défini par

$$\overrightarrow{Og_\Omega} = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_{\Omega} \overrightarrow{Ox} d\lambda_d(x).$$

- (1) Justifier la définition.
- (2) Montrer que  $g_\Omega$  est l'unique point  $g \in \mathbb{R}^d$  vérifiant

$$\int_A \overrightarrow{gx} d\lambda_d(x) = 0.$$

- (3) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que si  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une bijection affine telle que  $\Phi(\Omega) = \Omega$ , alors  $\Phi(g_\Omega) = g_\Omega$ .
- (4) Dans cette question, on prend  $d = 2$ . Montrer que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un rectangle ou un triangle, alors  $g_\Omega$  est ce à quoi on s'attend.