Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 6

Exercice 1. Soit f une fonction intégrable sur $[0, \infty[$, à valeurs complexes. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\, dx$.

Exercice 2. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $[0, \infty[$. Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f(\frac{n}{n+1} t)\, dt$.

Exercice 3. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx$.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

(1) On suppose que f possède une limite à gauche en 1. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1^-).$$

(2) On suppose que f possède une limite à droite en 0. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} f(0^+).$$

Exercice 5. Calculer $\int_0^1 x^n \log x\, dx$ pour tout entier $n \geq 1$, et en déduire l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\log x}{x - 1}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

Exercice 6. Montrer qu'on a
$$\int_0^1 \frac{(x \log x)^2}{1 + x^2}\, dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n + 1)^3}\,.$$

Exercice 7. Montrer que pour tous $p, q > 0$, on a
$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p + kq}\,.$$
En déduire que si $0 < p < 1$, alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1 + x}\, dx = \frac{1}{p} - 2p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - p^2}\,.$$

Exercice 8. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2+a^2}\cdot$

Exercice 9. Montrer qu'on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\cdot$

Exercice 10. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\,dt$.

Exercice 11. En considérant $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{i(k+1)\theta}x^k$, montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{k} = -\log\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| .$$

Exercice 12. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cdot$

(1) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos kx$ pour $0 < x \leq \pi$, et en déduire que

$$\forall x \in]0,\pi] \; : \; \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^{x/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

(2) On pose $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ pour $0 < t < \pi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi[$.
   (b) En intégrant par parties, montrer que $\lim_{k\to\infty} \int_0^{x/2} g(t) \sin kt\,dt = 0$, uniformément par rapport à $x \in [0, \pi]$.

(3) On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}\cdot$ Déduire de (1) et (2) que pour tout $x \in]0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}\cdot$$

(4) En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (s_n) définie par $s_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}$, montrer pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}\cdot$$

(5) En déduire qu'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{4},$$

puis déterminer la valeur de S.

Exercice 13. Soit $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$, pour $x > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que $f(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
(2) Montrer que les f_n et f sont intégrables sur $]0, \infty[$.
(3) Calculer $\int_0^\infty f(x)\,dx$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\int_0^\infty f_n(x)\,dx\big)$. Expliquer.

Exercice 14. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a

$$\sup_{n\geq 0} \left| \int_0^1 g(t)\, e^{nt}\, dt \right| < \infty.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $g = 0$.

(1) Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$, et soit $x \in]0,1[$.
 (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a le droit d'écrire

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, e^{kn(x-t)} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{kn(x-t)} f(t)\, dt\,.$$

 (b) En déduire qu'on a

$$\int_0^x f(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{kn(x-t)} f(t)\, dt\,.$$

(2) En appliquant (1) à $f(t) = g(1-t)$, montrer qu'on a $\int_{1-x}^1 g(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in [0,1[$.
(3) Conclure.

Exercice 15. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$.

(1) Calculer $\int_{\mathbb{R}} \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big|\frac{f(nx)}{n^\alpha}\big| \big)\, dx$.
(2) En déduire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^\alpha} = 0$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, et soit (λ_n) une suite de nombres réels positifs vérifiant $\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} f(\lambda_n x) = 0$. On pourra considérer la série $\sum |f_n|$, où $f_n(x) = f(\lambda_n x)$.

Exercice 17. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. On suppose que la fonction F' est bornée (*mais pas nécessairement continue*).

(1) Justifier que F' est une fonction borélienne.
(2) Montrer que la fonction F est lipschitzienne.
(3) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose que la suite (f_n) converge simpolement vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose également qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \int_\Omega |f_n|\, d\mu \le C$. Montrer que la fonction f est intégrable sur Ω.

Exercice 19. Donner un exemple d'une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *décroissant* vers 0 pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \neq 0$.

Exercice 20. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose que la suite (f_n) converge presque partout vers une fonction *intégrable* $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(1) Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big[|f_n - f| - (|f_n| - |f|) \Big] d\mu = 0\,.$$
(2) En déduire que si $\int_\Omega |f_n|\, d\mu$ tend vers $\int_\Omega |f|\, d\mu$ quand n tend vers l'infini, alors $\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$ tend vers 0.

Exercice 21. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. On suppose qu'on a $0 < \int_\Omega f\, d\mu < \infty$. Pour $\alpha > 0$, déterminer
$$\lim_{n\to\infty} n \int_\Omega \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] d\mu(x)\,.$$
On aura à distinguer 3 cas : $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$. Dans le troisième cas, on pourra utiliser l'inégalité $(1 + x)^\alpha \le e^{\alpha x}$, après l'avoir démontrée.

Exercice 22. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Toutes les fonctions sur Ω considérées sont mesurables et à valeurs complexes. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge **en mesure** vers une fonction f si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega;\ |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0\,.$$

(1) Montrer qu'une suite (f_n) converge en mesure vers une fonction f si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \min(1, |f_n - f|)\, d\mu = 0\,.$$
(2) En déduire que si une suite (f_n) converge presque partout, alors elle converge en mesure.

Exercice 23. (sommes de Riemann)

Dans tout l'exercice, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\,.$$

(1) On suppose que f est bornée et que l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure (de Lebesgue) nulle. Montrer que $R_n(f) \to \int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$.
(2) Montrer que si f est lipschitzienne, alors
$$R_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$
(3) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'on a
$$R_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2n}\,(f(b) - f(a)) + o\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$
(4) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer deux constantes α, β telles que
$$\int_a^b f(t)\,dt - R_n(f) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω, à valeurs complexes.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^n = \{x \in \Omega;\ \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\}$. Vérifier que la suite (A^n) est croissante, et déterminer $\bigcup_{n=1}^\infty A^n$.
(2) Déduire de (1) que pour tout $\eta > 0$, on peut trouver un ensemble $A_\eta \in \mathfrak{A}$ vérifiant les propriétés suivantes:
  (a) $\mu(A_\eta) < \infty$;
  (b) La fonction f est bornée sur A_η;
  (c) $\int_{\Omega\setminus A_\eta} |f|\, d\mu < \eta$.

(3) En utilisant (2), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que
$$\forall B \in \mathfrak{A} \ : \ \mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \varepsilon\,.$$
(4) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$
Montrer que la fonction F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25. Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

(1) Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue ≥ 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$ et telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive f sur Ω, on a
$$\int_X \phi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \phi'(t)\mu(\{x;\ f(x) \geq t\})\, dt\,.$$
(2) Expliciter la formule précédente lorsque $\phi(t) = t^p$, où $p \geq 1$.
(3) Soit f une fonction mesurable positive sur Ω. On suppose qu'il existe deux constantes $A < \infty$ et $c > 0$ telles que
$$\forall t > 0 \ : \ \mu(\{x;\ f(x) \geq t\}) \leq A\, e^{-ct}\,.$$
Montrer qu'on a $\int_\Omega f(x)^p d\mu(x) < \infty$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 26. Montrer que la formule $f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \sin(t^3 x)\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 27. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
(2) On pose $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G'.
(3) Montrer qu'on a $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.
(4) Calculer I.

Exercice 28. Dans cet exercice, on donne une méthode pour calculer, pour tout $\alpha > 0$, la valeur de l'intégrale
$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt\,.$$

(1) On définit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$.

(a) Justifier la définition, et montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
(b) Calculer $f(0)$ et déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(c) Montrer que f est dérivable sur $]0,\infty[$ et vérifie une équation différentielle du type $f'(x) - f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, où c est une constante qu'on exprimera en fonction de I_1.
(d) Résoudre l'équation différentielle précédente, puis calculer I_1.

(2) Calculer I_α pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 29. Le but de l'exercice est de déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_n(x) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{-itx}}{1+t^2}\, dt$. Montrer que les g_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, et que la suite (g_n') converge uniformément sur tout intervalle $[a,\infty[$, $a > 0$.
(2) Déduire de (1) que la fonction $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$, et donner une formule pour $\hat{f}'(x)$. Montrer ensuite que pour tout $x > 0$, on a
$$\hat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-iu}{u^2+x^2}\, e^{-iu}\, du\,.$$
(3) Montrer que $\hat{f}$ est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et y vérifie l'équation différentielle $\hat{f}'' = \hat{f}$.
(4) Montrer qu'on a $\hat{f}(x) = \pi e^{-vertx|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-t^2x}}{t^2}\, dt$.

(1) Justifier la définition, et montrer que F est continue à droite en 0.
(2) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
(3) Calculer $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 31. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\, dx = \log\lambda$.

Exercice 32. Calculer $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2x^2)}{1+x^2}\, dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 33. Montrer que pour tout $c \geq 0$, on a
$$\int_0^\infty e^{-c/x^2}\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\sqrt{2c}}\,.$$

Exercice 34. (fonction Gamma, 1)
Pour $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\,.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$.
(3) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x)$.
(4) Montrer que la fonction $\log \Gamma$ est convexe.
(5) Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 35. (fonction Gamma, 2)
On garde les notations de l'exercice 34. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\,.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $J_n(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du$. Trouver une relation entre $J_n(x)$ et $J_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$, et en déduire $J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 36. (fonction Gamma, 3)
On garde les notations de l'exercice 34. Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $\Gamma(x+1)$ quand $x \to \infty$:
$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}\,.$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} g(x,u)\, du$, où $g(x,u) = 0$ si $\sqrt{x} \leq -u$ et $g(x,u) = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - u\sqrt{x}\right)$ si $\sqrt{x} > -u$.
(2) Pour $u > 0$, déterminer $\sup_{x\geq 1} g(x,u)$; et pour $u < 0$, déterminer $\sup_{x>0} g(x,u)$.
(3) Démontrer la formule de Stirling.

Exercice 37. Soit $f : [0, b[\to \mathbb{C}$ une fonction borélienne continue en 0, avec $f(0) \neq 0$.

(1) On suppose qu'on a $\int_0^b e^{-\lambda u} |f(u)|\, du < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez grand.
    (a) Montrer que pour tout $\delta \in]0, b[$, on a $\int_\delta^b e^{-\lambda u} f(u)\, du = o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ quand $\lambda \to \infty$.
    (b) Déterminer un équivalent de $\int_0^b e^{-\lambda u} f(u)\, du$ quand $\lambda \to \infty$.
(2) On suppose qu'on a $\int_0^b e^{-\lambda u^2} |f(u)|\, du < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez grand.

(a) Montrer que pour tout $\delta \in]0,b[$, on a $\int_\delta^b e^{-\lambda u^2} f(u)\,du = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ quand $\lambda \to \infty$.
(b) Déterminer un équivalent de $\int_0^b e^{-\lambda u^2} f(u)\,du$ quand $\lambda \to \infty$.

Exercice 38. (méthode de Laplace)
Soient $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que la fonction $t \mapsto e^{-\lambda\varphi(t)} f(t)$ est intégrable sur $[a,b[$ pour$\lambda > 0$ assez grand, et on pose

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda\varphi(t)} f(t)\,dt\,.$$

(1) On suppose qu'on a $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in [a,b[$, et que f est continue en a avec $f(a) \neq 0$. Montrer qu'on a

$$F(\lambda) \sim \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \frac{e^{-\lambda\varphi(a)}}{\lambda}$$

quand $\lambda \to \infty$. On pourra poser $u = \varphi(t) - \varphi(a)$ et appliquer l'exercice 37
(2) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Enfin on suppose toujours que f est continue en a avec $f(a) \neq 0$. Montrer qu'on a

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f(a)}{\sqrt{\varphi''(a)}} \frac{e^{-\lambda\varphi(a)}}{\sqrt{\lambda}}$$

quand $\lambda \to \infty$. On pourra poser $u = \sqrt{\varphi(t) - \varphi(a)}$.

Exercice 39. Utiliser l'exercice 38 pour donner un équivalent de $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ quand $x \to \infty$.

Exercice 40. Utiliser l'exercice 38 pour donner un équivalent de l'intégrale de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ quand $n \to \infty$.

Exercice 41. Déterminer un équivalent de l'intégrale I_n dans les cas suivants.
(1) $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$.
(2) $I_n = \int_0^1 [\log(1+x)]^n dt$.
(3) $I_n = \int_0^\pi t^n \sin t\,dt$.

Exercice 42. Montrer que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x(u-\log u)} du\,.$$

En déduire la formule de Stirling : $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ quand $x \to \infty$.