Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x\,(\ln x)^\beta}$ est-elle intégrable sur $[2, \infty[$?

Exercice 2. Soit $u : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $u(t)/\log(t)$ admet une limite $l > 1$ quand $t \to \infty$ (la valeur $l = \infty$ est autorisée). Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-u(t)}$ est intégrable sur $[a, \infty[$.

Exercice 3. La fonction $t \mapsto \sin(\log(1+t^{77}))\, e^{-\sqrt{78t-\frac{79}{t}}}$ est-elle intégrable sur $[6, \infty[$?

Exercice 4. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $t \mapsto \left(1 + \frac{1}{t^\alpha}\right)^t$ est-elle intégrable sur $[1, \infty[$?

Exercice 5. Montrer qu'on a $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t}\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

Exercice 6. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $[0, \infty[$.

(1) Peut-on affirmer que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$?

(2) Montrer que si $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$, alors cette limite est nécessairement égale à 0.

(3) Montrer que si f est *uniformément* continue, alors $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Exercice 7. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si la fonction f' est intégrable sur $[0, \infty[$, alors $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$.

Exercice 8. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ vérifiant $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty$.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A > 0$ tel que $\int_A^\infty |f(t)|^2 dt < \varepsilon$.

(2) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $x \geq A$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \frac{C_A}{\sqrt{x}} + \int_A^\infty |f(t)|^2 dt\,,$$
où $C_A = \int_0^A |f(t)|\, dt$.

(3) Montrer qu'on a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\, dt = 0$.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, et soit $\lambda = a + ib$.

(1) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-\lambda}\cdot$

(2) En déduire qu'en notant $\operatorname{sgn}(b)$ le signe de b, on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x-\lambda} = i\pi \operatorname{sgn}(b).$$

Exercice 10. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}\cdot$

Exercice 11. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}\cdot$

(1) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $F(x) = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$, où on suppose que $\Delta = b^2 - 4c$ est < 0.

(a) Montrer qu'on peut écrire $F(x) = A\,\frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c} + \frac{B}{x^2+bx+c}$, où les constantes A et B sont à déterminer.

(b) Calculer $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c}\,dx$.

(c) Montrer qu'on peut mettre $x^2 + bx + c$ sous la forme $(x + p)^2 + q^2$, où p et q sont à déterminer, puis calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+bx+c}$ en fonction de q.

(d) Pour tout $R > 0$, calculer $\int_{-R}^{R} F(x)\,dx$ en fonction de R, A, B, p et q.

(e) Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)\,dx = \pi\,\frac{2\beta - b\alpha}{\sqrt{4c - b^2}}\cdot$$

(2) Trouver des constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ telles que

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\alpha' x + \beta'}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\cdot$$

(3) Calculer l'intégrale I.

Exercice 12. (formule des résidus)

Dans tout l'exercice, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, où les polynômes P et Q sont à coefficients réels. On suppose que Q n'a pas de racines réelles, et que $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$. On suppose également que toutes les racines complexes de Q sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est égal à 1.

(1) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les racines complexes de Q à partie imaginaire strictement positive.

(a) Montrer qu'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{x - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\overline{c_j}}{x - \overline{\lambda_j}}\,,$$

où les c_j sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients c_j sont donnés par $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$ ·

(c) Montrer également qu'on a $\sum_{j=1}^{N} c_j + \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} = 0$.

(3) Avec les notations de (2), et en utilisant l'exercice 9, établir la **formule des résidus** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)} \cdot$$

(4) *Application numérique :* calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Exercice 13. Calculer les intégrales $I_1 = \int_0^\infty \frac{3x+1}{1+x^4}\,dx$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ en utilisant la formule des résidus.

Exercice 14. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\,dt$.

(1) Justifier que I a bien un sens.

(2) En remarquant que $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$, montrer qu'on a $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\,dt$.

(3) En déduire que $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t \sin t)\,dt$, puis que

$$I = -\frac{\pi}{2}\log(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2t)\,dt\,.$$

(4) Montrer qu'on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin u)\,du = I$, puis que $\int_0^{\pi} \log(\sin u)\,du = 2I$.

(5) calculer I.

Exercice 15. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t^{1/4})e^{-t^{1/4}}$.

(1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $[0,\infty[$. Dans la suite, on pose $I_p = \int_0^\infty t^p f(t)\,dt$.

(2) Montrer que I_p est la partie imaginaire de $J_p = 4\int_0^\infty u^{4p+3}e^{-\lambda u}du$, où $\lambda = 1-i$.

(3) Calculer I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\,dt$.

Exercice 17. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-i\lambda t}dt\,.$$

On dit que $\widehat{u}$ est la **transformée de Fourier** de la fonction u.

(1) Justifier la définition en montrant que $u(x)e^{-i\lambda x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) Calculer $\widehat{u}(\lambda)$ lorsque u est la fonction indicatrice d'un intervalle borné (a, b), et en déduire que si φ est une fonction en escalier, alors $\widehat{\varphi}(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$.
(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue identiquement nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
 (a) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\,\widehat{f}(\lambda)$.
 (b) Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, exprimer $\widehat{f^{(k)}}(\lambda)$ en fonction de $\widehat{f}(\lambda)$.
 (c) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19. Pour $x > 0$, on pose $R(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$.
(1) Justifier que $R(x)$ est bien un vrai nombre, i.e. $R(x) < \infty$.
(2) Montrer qu'on a $R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$.
(3) En déduire que $R(x)$ est équivalent à $\phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 20. En utilisant une méthode semblable à celle de l'exercice 19, trouver des équivalents simples de $f(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ et $g(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 21. Montrer que $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Exercice 22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.
(1) Calculer $F_1(x)$.
(2) En intégrant par parties, établir la relation

$$2nF_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x)\,.$$

(3) En déduire $F_2(x)$.

Exercice 23. En utilisant l'exercice 22, déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\cdot$

Exercice 24. Calculer $F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ en posant $t = \tan u$.

Exercice 25. Soit $\beta > 0$. Calculer l'intégrale $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$ en posant $u = x^{-\beta}$.

Exercice 26. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}\cdot$ Montrer que si $2\beta - \alpha = 2$, alors $\int_{]0,1]} f = \int_{[1,\infty[} f$.

Exercice 27. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \sin t$.

Exercice 28. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,dt$ en posant $u = \cos t$, et $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2+\sin t}$ en posant $u = \tan(t/2)$.

Exercice 29. Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ en posant $u = \tan(x/2)$.

Exercice 30. Pour $\alpha \in]0, 1]$, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 31. Pour $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$.

Exercice 32. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$.

Exercice 33. (intégrales de Wallis et formule de Stirling)

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$. Les W_n sont appelées les **intégrales de Wallis**.

  (a) Montrer qu'on a $W_{n+2} = I_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x\, (\sin x)^n]\, \cos x\, dx$, et en déduire la relation de récurrence
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, W_n\,.$$

  (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,.$$

  (c) Montrer que la suite (W_n) est décroissante, puis que $W_{n+1} \sim W_n$ quand $n \to \infty$. Déterminer ensuite un équivalent simple de $W_{2k}W_{2k+1}$ en utilisant (1b), et conclure que
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

(2) Le but de cette question est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $n!$ quand $n \to \infty$:
$$n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \log\left(\frac{n!}{n^n n e^{-n}\sqrt{n}}\right)$. Montrer qu'on a

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

et en déduire que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente.

(b) Déduire de (2a) qu'il existe une constante C tell que $n! \sim C\, n^n n e^{-n}\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

(c) Déterminer la contante C en utilisant (1), et conclure.