Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. (inclusion-exclusion, 2)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soient $A_1, \ldots, A_N \in \mathfrak{B}$. Justifier l'identité $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^N A_j} = \mathbf{1} - \prod_{j=1}^N (\mathbf{1} - \mathbf{1}_{A_j})$, et en déduire la formule

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \mu(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) \right).$$

Exercice 2. (intégrale et aire du sous-graphe)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction borélienne $f : I \to [0, \infty]$, on pose

$$\mathrm{SG}(f, I) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x \in I \text{ et } 0 \leq y < f(x)\}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{SG}(f, I)$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$, pour toute fonction borélienne positive f.
(2) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée positive. On écrit $\varphi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, où les A_j sont deux-à-deux disjoints. Calculer $\lambda_2\big(\mathrm{SG}(\varphi, I)\big)$ en fonction des α_j et des mesures de Lebesgue $\lambda_1(A_j)$.
(3) Montrer que pour toute fonction borélienne $f : I \to [0, \infty]$, on a

$$\int_I f \, d\lambda_1 = \lambda_2\big(\mathrm{SG}(f, I)\big).$$

Exercice 3. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$, et soit $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \to [0, \infty]$, on a $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i \in I} \int_\Omega f \, d\mu_i$.

Exercice 4. (mesure discrète)
Que devient la formule de l'exercice 3 lorsqu'on prend $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu_i = a_i \delta_{x_i}$, où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels positifs et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de Ω?

Exercice 5. (mesure à densité)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit w une fonction mesurable positive sur Ω. Montrer qu'on définit une mesure ν sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ en posant $\nu(A) = \int_A w \, d\mu$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

Exercice 6. Déterminer la limite de $u_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^4/n} d\lambda_1(t)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7. Déterminer la limite de $\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ quand $s \to 1^+$, et la limite de $f(x) = \sum_0^\infty e^{-n^2 x}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \int_\Omega |f_n|\, d\mu < \infty$. Montrer que pour presque tout $x \in \Omega$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $(B_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcup_{i\in I} B_i = \Omega$ et $\sum_{i\in I} \int_{B_i} |f|\, d\mu < \infty$. En utilisant l'exercice 5, montrer que la fonction f est intégrable.

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie comme suit : $f(x) \equiv a_n$ sur $x \in [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f est borélienne, puis calculer $\int_{[0,\infty[} f\, d\lambda_1$ en fonction des a_n.

Exercice 11. (Borel-Cantelli 2)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$. On suppose qu'on a $\sum_1^\infty \mu(A_n) < \infty$. Montrer que la fonction $f = \sum_0^\infty \mathbf{1}_{A_n}$ vérifie $f(x) < \infty$ pp, et en déduire que $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$.

Exercice 12. (presque partout et partout)
(1) Montrer que si A est un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda_1(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$.
(2) En déduire que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = g(x)$ presque partout relativement à la mesure de Lebesgue λ_1, alors $f(x) = g(x)$ partout.

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire d'une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\int_I |f(x)|\, d\lambda_1(x) = 0$?

Exercice 14. (inégalité de Hölder)
Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (On dit que p et q sont des **exposants conjugués**).
(1) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que pour tous $a, b \in [0, \infty]$, on a
$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q} b^q\,.$$

(2) En déduire que si $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré, alors, pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \to [0, \infty]$, on a
$$\int_\Omega fg\, d\mu \leq \left(\int_\Omega f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} .$$
Cette inégalité s'appelle l'inégalité de **Hölder**. Le cas $p = 2 = q$ s'appelle l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.

Exercice 15. (Hölder 2)

(1) Que devient l'inégalité de Hölder lorsque $\Omega = \{1, \dots, d\}$ avec la mesure de comptage?
(2) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On suppose que les séries $\sum |x_n|^p$ et $\sum |y_n|^q$ sont convergentes. Montrer que la série $\sum x_n y_n$ est absolument convergente.
(3) Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Montrer que si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable telle que $\int_\Omega f^p d\mu < \infty$ pour un certain $p \geq 1$, alors $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$. Montrer également que si $\mu(\Omega) = 1$, alors $\int_\Omega f d\mu \leq \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{1/p}$.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

(1) Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que $|\omega| = 1$ et
$$\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| = \omega \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re}\,(\omega f)\, d\mu\, .$$
(2) Montrer qu'on a $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| = \int_\Omega |f|\, d\mu$ si et seulement si il existe une constante λ telle que $|\lambda| = 1$ et $f(x) = \lambda\, |f(x)|$ presque partout.

Exercice 17. Soit $\lambda > 0$, et soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$ définie par
$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\, \delta_k\, .$$
(1) Calculer $\mu(\mathbb{R}^+)$.
(2) Montrer qu'on a $\int_{\mathbb{R}^+} x\, d\mu(x) = \lambda$ et $\int_{\mathbb{R}^+} x^2 d\mu(x) = \lambda + \lambda^2$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{itx}$ est intégrable par rapport à μ, puis calculer $\int_{\mathbb{R}^+} e^{itx} d\mu(x)$.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$A_n = \{x \in \Omega;\ |f(x)| \geq n\}\, .$$

(1) En utilisant l'exercice 5, déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu$.
(2) En déduire que $\mu(A_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$.
(3) Dans cette question, on suppose que la fonction f est bornée et que la mesure μ est *finie*. Montrer qu'on a $\int_\Omega e^{|f|} d\mu < \infty$, et en déduire qu'on a $\mu(A_n) = O\left(e^{-n}\right)$.
(4) On revient au cas général (μ quelconque et f intégrable).
  (a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_p = \{x \in \Omega;\ p \leq |f(x)| < p+1\}$. Montrer qu'on a $\sum_1^\infty p\, \mu(B_p) < \infty$.
  (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mu(A_n)$ à l'aide des $\mu(B_p)$, $p \geq n$.
  (c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ est convergente.

Exercice 19. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 2$ telle que

$$\mu(\{x;\ |f(x)| \geq t\}) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \quad \text{quand } t \to +\infty\,.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{x \in \Omega;\ n \leq |f(x)| < n+1\}$. Montrer qu'on a

$$\mu(B_n) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \int_{B_n} |f|\, d\mu \leq (n+1)\, \mu(B_n)\cdot$$

(2) Montrer que la fonction f est intégrable.

Exercice 20. (convergence en mesure)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur Ω. On dit que la suite (f_n) **converge vers** 0 **en mesure** si

$$\forall \varepsilon > 0\ :\ \mu\left(\{x \in \Omega;\ f_n(x) \geq \varepsilon\}\right) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Montrer que si $\int_\Omega f_n\, d\mu \to 0$, alors (f_n) tend vers 0 en mesure.

Exercice 21. (convergence en mesure et convergence presque partout)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur Ω.

(1) En se souvenant que $\overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}\, A_n)$ pour toute suite d'ensembles mesurables (A_n), montrer que si $f_n(x) \to 0$ presque partout, alors (f_n) tend vers 0 en mesure.
(2) Dans cette question, on suppose que la suite (f_n) converge vers 0 en mesure.
  (a) Montrer que (f_n) possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\mu\left(\{x \in \Omega;\ f_{n_k}(x) \geq 1/k\}\right) \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1\,.$$

  (b) Montrer qu'on a $\sum_1^\infty \mu(\{x;\ f_{n_k}(x) \geq \varepsilon\}) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(c) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que la suite (f_{n_k}) converge presque partout.

(3) Montrer que la suite (f_n) converge vers 0 en mesure si et seulement si toute sous-suite de (f_n) possède une sous-suite qui tend vers 0 presque partout.

Exercice 22. (inégalité de Salem-Zygmund)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$, et soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. On pose $I_1(f) = \int_\Omega f \, d\mu$ et $I_2(f) = \int_\Omega f^2 \, d\mu$.

(1) Soit $\lambda \in]0, 1[$. On pose $A = \{x \in \Omega;\ f(x) \geq \lambda\, I_1(f)\}$. En écrivant $\int_\Omega = \int_{\omega \setminus A} + \int_A$, montrer qu'on a

$$I_1(f) \leq \lambda\, I_1(f) + \int_A f \, d\mu \,.$$

(2) On suppose qu'on a $0 < I_2(f) < \infty$. En utilisant (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a

$$\mu\big(\{f \geq \lambda\, I_1(f)\}\big) \geq (1 - \lambda)^2 \, \frac{I_1(f)^2}{I_2(f)} \,.$$

Exercice 23. (Borel-Cantelli 3)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit également $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$. On suppose qu'on a $\sum_1^\infty \mu(A_n) = \infty$, et que les A_n sont **deux à deux indépendants**, ce qui signifie que $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i)\mu(A_j)$ si $i \neq j$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mu\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = 1$.

(1) Pour $i \geq 1$, on pose $\alpha_i = \mu(A_i)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j = \frac{S_n^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq \frac{S_n^2 - S_n}{2} \,,$$

où $S_n = \sum_1^n \alpha_i$, et en déduire que

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \to \infty \quad \text{quand } n \to \infty \,.$$

(2) On pose $f_n = \sum_1^n \mathbf{1}_{A_i}$. Vérifier qu'on a

$$\int_\Omega f_n \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{et} \quad \int_\Omega f_n^2 \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \,.$$

(3) Soit $\lambda \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_{n,\lambda} = \left\{ x \in \Omega;\ f_n(x) \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right\}$. En utilisant (2) et l'exercice 22, montrer que

$$\forall n \geq 1 \ : \ \mu(B_{n,\lambda}) \geq (1-\lambda^2) \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j} \,.$$

(4) En se souvenant que $\mu\left(\overline{\lim}\, B_n\right) \geq \overline{\lim}\, \mu(B_n)$ pour toute suite d'ensembles mesurables (B_n), montrer que

$$\forall \lambda \in]0,1[\ : \ \mu\left(\overline{\lim}\, B_{n,\lambda}\right) \geq (1-\lambda)^2 \,.$$

(5) Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$, on a $\overline{\lim}\, B_{n,\lambda} \subset \overline{\lim}\, A_n$.

(6) Conclure.