Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, de trois façons différentes.

(1) *1ère méthode : segments emboités.*
   (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles compacts non-triviaux telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \notin I_n$.
   (b) En déduire le résultat.

(2) *2è méthode : développement décimal.* On rappelle que tout nombre réel $x \in [0,1[$ admet un unique développement décimal "propre", autrement dit, x peut s'écrire de manière unique sous la forme
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, 10^{-k}\,,$$
où les $a_k(x)$ sont des entiers compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Utiliser ce fait pour montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de $[0,1[$ alors on peut construire un réel $x \in [0,1[$ différent de tous les x_n, et conclure.

(3) *3è méthode : utilisation de* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $J : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ l'application définie comme suit : si $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\geq 0} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors
$$J(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}\cdot$$
Montrer que J est injective, et conclure.

Exercice 2. (nombres transcendants)
Un nombre réel x est dit **algébrique** s'il est racine d'une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme non nul à coefficients rationnels. Un nombre **transcendant** est un nombre qui n'est pas algébrique. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des nombres transcendants.

(1) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
(2) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et conclure.

Exercice 3. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que toute famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints est dénombrable.

Exercice 4. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\ f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\}$, où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont les limites à gauche et à droite de f au point x.

  (a) Montrer que si $x_1, \dots, x_N$ sont des points de D_ε avec $x_1 < \cdots < x_N$, alors
$$N \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \leq \frac{1}{\varepsilon}(f(x_N^+) - f(x_1^-)).$$

  (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_\varepsilon \cap [-n, n]$ est fini.

  (c) Conclure que D_ε est dénombrable.

(2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 6. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. On écrit $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[a_n, \infty[}(x).$$
Montrer que la fonction f est croissante, et que l'ensemble de ses points de discontinuité est exactement égal à D.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que tout ouvert de X est réunion dénombrable de fermés.

Exercice 8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres positifs. Établir les inégalités suivantes :
$$\underline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq \underline{\lim}\, (u_n + v_n) \leq \underline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\, (u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n.$$

Exercice 9. Soit (x_n) une suite de nombres positifs. On suppose que $x_n + \frac{1}{2}x_{2n}$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

(1) On pose $L = \overline{\lim}\, x_n$ et $l = \underline{\lim}\, x_n$. En utilisant l'exercice 8, montrer qu'on a $1 \leq l + \frac{1}{2}L$ et $1 \geq L + \frac{1}{2}l$.

(2) Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 10. Soit Λ un ensemble, et soit $(\Lambda_k)_{k \in K}$ une partition de Λ. Montrer que si $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de nombres positifs, alors
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{k \in K} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_\lambda.$$

Exercice 11. Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres positifs indexée par un ensemble produit $I\times J$. Montrer à l'aide de l'exercice 10 qu'on a

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}\,.$$

Exercice 12. (série produit)
Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs de sommes

$$U=\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad V=\sum_{l=0}^{\infty} v_l\,.$$

Soit (w_n) la suite définie par

$$w_n=\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,.$$

Enfin, soit $\Lambda=\{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\ k\le n\}$. Montrer à l'aide de l'exercice 10 qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{(k,n)\in\Lambda} u_k v_{n-k} = UV.$$

Exercice 13. (théorème de convergence dominée pour les séries)
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{N}$, et soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes :

(a) $f_n(i)\to f(i)$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ quand $n\to\infty$;
(b) Il existe une fonction $g: I\to\mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(i)<\infty$ et $|f_n(i)|\le g(i)$ pour tout n et pour tout $i\in\mathbb{N}$.

(1) Montrer que la série $\sum f(i)$ est absolument convergente.
(2) Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\forall n\ge 0\ :\ \left|\sum_{i=0}^{\infty} f_n(i)-\sum_{i=0}^{\infty} f(i)\right| \le \sum_{i=0}^{N} |f_n(i)-f(i)| + 2\sum_{i>N} g(i)\,.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} f_n(i)\,.$$

Exercice 14. En utilisant la formule du binôme et l'exercice 13, montrer que

$$\forall z\in\mathbb{C}\ :\ e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Exercice 15. Le but de l'exercice est de montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable par une méthode "différente" de celle vue en cours.

(1) Soit I un ensemble quelconque, et soit $\Phi : I \to \mathcal{P}(I)$ une application de I dans $\mathcal{P}(I)$. On pose $E = \{i \in I;\ i \notin \Phi(i)\}$. On suppose qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $E = \Phi(i_0)$. Le point i_0 appartient-il à E, ou bien à $I \setminus E$?

(2) Montrer qu'il ne peut jamais exister de surjection d'un ensemble I sur $\mathcal{P}(I)$, et en déduire le résultat souhaité.

(3) Cette démonstration est-elle *réellement* différente de celle vue en cours?

Exercice 16. Soit I un ensemble. Montrer que pour tous $A, B \subset I$, on a

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B\,.$$

Exercice 17. Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω, on définit leur **différence symétrique** $A\Delta B$ par $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

(1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \pmod 2\,.$$

(2) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre, et le symétrique d'un élément $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(3) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser l'élément unité.

Exercice 18. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω. On note $\overline{\lim}\, A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n, et $\underline{\lim}\, A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. Vérifier qu'on a

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n\,.$$

Exercice 19. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω. Montrer qu'on a

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim}\, A_n} = \overline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\underline{\lim}\, A_n} = \underline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}\,.$$

Exercice 20. Soit Ω un ensemble. On dit qu'une suite (A_n) de parties de Ω est **convergente** si on a $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$, et on note alors $\lim_n A_n$ cet ensemble.

(1) Comment se traduit la convergence d'une suite d'ensembles en termes de fonctions indicatrices?

(2) Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (A_n) est convergente; et si c'est le cas, trouver sa limite.
   (a) La suite (A_n) est croissante.
   (b) La suite (A_n) est décroissante.
   (c) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.