

Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + z + \frac{a}{xyz}$, où $a > 0$ est fixé.

- (1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que si $u = (x, y, z) \in \Omega$ vérifie $f(u) \leq \alpha$ alors $xyz \geq a/\alpha$, et en déduire que l'ensemble $\{u \in \Omega; f(u) \leq \alpha\}$ est un fermé de \mathbb{R}^3 .
- (2) Montrer que f possède un minimum global et déterminer ce minimum.

Exercice 2. Soient $a, b > 0$. Déterminer $\inf \left\{ xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}; x > 0, y > 0 \right\}$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$, soit $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \times \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + x_i}.$$

- (1) Montrer qu'on a $f(x_1, \dots, x_n) \leq x_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, et en déduire que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) \geq \alpha\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .
- (2) Montrer que f possède un maximum global et déterminer la valeur de ce maximum.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien, et soient $a_1, \dots, a_n \in E$. Soient également $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres positifs non tous nuls. Montrer qu'il existe un unique point $x \in E$ minimisant $\sum_{i=1}^n \lambda_i \|x - a_i\|^2$ et déterminer ce point.

Exercice 5. (point de Fermat)

Dans tout l'exercice, ABC est un triangle dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 dont tous les angles sont de mesure $< 2\pi/3$. Si M est un point du plan, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

- (1) Montrer que la fonction f possède un minimum global.
- (2) On note 2α la mesure de l'angle \widehat{A} dans le triangle ABC .
 - (a) Si M est un point de la bissectrice intérieure de \widehat{A} , exprimer MB en fonction de AB , AM et α . De même, exprimer MC en fonction de AC , AM et α .

- (b) Pour $\varepsilon \geq 0$, on note M_ε le point de la bissectrice intérieure de \widehat{A} tel que $M_\varepsilon A = \varepsilon$. Déduire de (a) que les fonctions $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon B$ et $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon C$ sont dérivables en 0^+ et déterminer leurs dérivées en 0.
- (c) Conclure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$f(M_\varepsilon) = AB + AC - c\varepsilon + o(\varepsilon)$$

au voisinage de 0.

- (3) Montrer que les points A , B et C ne minimisent pas la fonction f .
- (4) Montrer que f est différentiable sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$, et pour $M \in \Omega$, exprimer $\nabla f(M)$ à l'aide des longueurs MA , MB , MC et des vecteurs \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} .
- (5) Montrer qu'il existe un unique point M minimisant $MA + MB + MC$, et que ce point est caractérisé par la propriété suivante : les 3 angles \widehat{AMB} , \widehat{BMC} et \widehat{CMA} ont pour mesure $2\pi/3$.

Exercice 6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable. On suppose que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , et ∂A la frontière d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$.

- (1) Soit B un ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que $\overline{B} \subset \Omega$, et soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose qu'il existe un point $a \in B$ tel que $\forall \xi \in \partial B : \varphi(a) < \varphi(\xi)$. Montrer qu'il existe un point $u \in B$ tel que $d\varphi(u) = 0$.
- (2) Soit $a \in \Omega$ quelconque.
- (a) On pose $S = \{\tau \in \mathbb{R}^n; \|\tau\| = 1\}$ et $\varepsilon = \inf\{\|Df(a)\tau\|; \tau \in S\}$. Montrer que ε est strictement positif, et qu'on a $\forall h \in \mathbb{R}^n : \|Df(a)h\| \geq \varepsilon \|h\|$.
- (b) En utilisant la définition de la différentiabilité, montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(a, \delta) \subset \Omega$ et $\forall \xi \in \partial B(a, \delta) : \|f(\xi) - f(a)\| \geq \frac{\varepsilon\delta}{2}$.
- (c) Soit $v \in B(f(a), \varepsilon\delta/4)$. En appliquant (1), à $\varphi(x) = \|f(x) - v\|^2$, montrer qu'il existe un point $u \in B(a, \delta)$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : \langle Df(u)h, f(u) - v \rangle = 0$$

- (d) Déduire de (c) qu'on a $B(f(a), \varepsilon\delta/4) \subset f(B(a, \delta))$.

- (3) Conclure.

Exercice 7. (calcul des variations)

Dans tout l'exercice, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$, l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. On définit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(u) = \int_0^1 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t)) dt .$$

Montrer que Φ est différentiable sur E et que sa différentielle est donnée par

$$d\Phi(u)h = \int_0^1 \left[\partial_2 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t))h(t) + \partial_3 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t))h'(t) \right] dt.$$

(2) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ fixés. On pose $\mathcal{E}_{pq} = \{u \in E; u(0) = p, u(1) = q\}$ et $E_0 = \{h \in E; h(0) = 0 = h(1)\}$. Montrer que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à \mathcal{E}_{pq} , alors $d\Phi(u)h = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$.

(3) On garde les notations de (2).

(a) Montrer que si $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $\int_0^1 c(t)h'(t) dt = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$, alors c est nécessairement constante.

(b) En déduire que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à \mathcal{E}_{pq} , alors u doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \left[\partial_3 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t)) \right] = \partial_2 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t)).$$

(4) Dans cette question, on prend $\mathcal{L}(t, u, v) = \sqrt{1 + v^2}$.

(a) Montrer que la fonction Φ est convexe.

(b) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{E}_{p,q}$ minimisant Φ , et déterminer cette fonction.

(c) Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice 8. (théorème de Rolle dans \mathbb{R}^n)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et différentiable dans Ω . On suppose que f est constante sur $\partial\Omega$. Montrer qu'il existe un point $c \in \Omega$ tel que $df(c) = 0$.

Exercice 9. Soit E un evn de dimension finie et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe un point $c \in E$ tel que $Df(c) = 0$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que f n'est pas minorée, mais admet un minimum local. Montrer que f' s'annule au moins deux fois.

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^3$

(b) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2 + e^{1-x^2}$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^4$

(e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$

(f) $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$

Exercice 12. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - y^3 + x^2 - 2y^2 - 6x + 3y$.

Exercice 13. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^3 - x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 7x - 8y - 6z$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

- (1) Déterminer les extrema locaux de f .
- (2) On note Δ le triangle plein (fermé) délimité par les droites d'équation $y = -1$, $y = 2 + x$ et $y = 2 - x$.
 - (a) Pourquoi f possède-t-elle un maximum et un minimum sur Δ ?
 - (b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ .

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$

- (1) Montrer que f possède un minimum global en $(0, 0)$ et ne possède pas d'autre extremum local.
- (2) Montrer que f possède un maximum sur le carré $C = [0, 2] \times [0, 2]$, et déterminer ce maximum.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Montrer que f n'est pas minorée, qu'elle admet un minimum local, et que Df ne s'annule qu'une fois. Comparer avec l'exercice 10.

Exercice 17. (principe du maximum)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe \mathcal{C}^2 dans Ω . On suppose qu'on a $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $f(x) \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi)$ pour tout $x \in \Omega$.

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x) + 2^{-n} \|x\|^2$.
 - (a) Montrer qu'on a $\Delta f_n(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, et en déduire que f_n n'admet pas de maximum local dans Ω .
 - (b) Pourquoi f_n possède-t-elle un maximum global sur $\overline{\Omega}$?
 - (c) Déduire de (a) et (b) que $\forall x \in \Omega : f_n(x) \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) + 2^{-n} M$, où M est une constante indépendante de n .
- (2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 18. (inégalité de Jensen)

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E et soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- (1) Établir par récurrence sur n le résultat suivant : si $x_1, \dots, x_n \in C$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifient $\sum_1^n \lambda_i = 1$, alors $\sum_1^n \lambda_i x_i \in C$.

(2) Montrer que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifient $\sum_1^n \lambda_i = 1$ et si $x_1, \dots, x_n \in C$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que f est une fonction affine si et seulement si f est convexe et $\Delta f = 0$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$. Montrer que f est convexe.

Exercice 21. Soit $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ et soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1 \cdots x_n}.$$

Montrer que la fonction $\log g$ est convexe, puis que g est convexe.

Exercice 22. Soit $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, soit $a > 0$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x_1 + \cdots + x_n + \frac{a}{x_1 \cdots x_n}.$$

- (1) Montrer que f est convexe.
- (2) Montrer que f possède un minimum global et calculer ce minimum.

Exercice 23. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On définit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Mx, x \rangle - \langle a, x \rangle.$$

- (1) Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si la matrice M est positive.
- (2) On suppose que M est définie positive. Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point, et déterminer ce point

Exercice 24. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, et soient $a, b, c > 0$. Déterminer le maximum sur Σ de la fonction $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

Exercice 25. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x + e^y + e^z = 1\}$, et soient $a, b, c > 0$. Déterminer le maximum sur Σ de la fonction $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

Exercice 26. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 1 \text{ et } x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Déterminer le maximum et le minimum sur Σ de la fonction $(x, y, z) \mapsto xyz$.

Exercice 27. Soit $\alpha > 0$ et soit $\Sigma_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = \alpha y^2\}$. Soit également $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$.

- (1) Montrer que le seul point où $f|_{\Sigma_\alpha}$ peut posséder un extremum local est le point $(0, 0)$.
- (2) Déterminer si $f|_{\Sigma_\alpha}$ possède un maximum local ou un minimum local (ou ni l'un ni l'autre) en $(0, 0)$, selon les valeurs de α .

Exercice 28. Soit $p > 0$. Parmi tous les rectangles de périmètre p , quel est celui dont l'aire est maximale?

Exercice 29. On veut construire une boîte en carton parallélépipédique sans couvercle de volume 4 litres, en utilisant le moins de carton possible. Quelles doivent être les dimensions de la boîte?

Exercice 30. Déterminer les dimensions du cylindre à base circulaire d'aire (aire latérale+dessus+dessous) égale à $\sigma = \frac{10\pi}{3} \text{ dm}^2$ et de volume maximal.

Exercice 31. Déterminer la distance (euclidienne) du point $a = (5/2, 5/2)$ à l'hyperbole $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$.

Exercice 32. Soient $a, b > 0$. Montrer qu'il existe un unique rectangle (à côtés parallèles aux axes de coordonnées) d'aire maximale inscrit dans l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 33. (inégalité d'Hadamard)

Dans tout l'exercice, on note E l'espace \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne.

- (1) Justifier l'existence de $M = \max\{\det(u_1, \dots, u_n); \|u_1\| = \dots = \|u_n\| = 1\}$.
- (2) Dans cette question, on fixe $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que $\|v_i\| = 1$ pour tout i et $\det(v_1, \dots, v_n) = M$.
 - (a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. En appliquant le théorème des extrema liés à la fonction $u \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n)$ montrer qu'il existe un nombre réel μ_i tel que

$$\forall h \in E : \det(v_1, \dots, v_{i-1}, h, v_{i+1}, \dots, v_n) = \mu_i \langle v_i, h \rangle.$$

- (b) Montrer que (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de E .
- (3) Quelle est la valeur de M ?

(4) Montrer que pour tous $u_1, \dots, u_n \in E$, on a

$$|\det(u_1, \dots, u_n)| \leq \|u_1\| \times \dots \times \|u_n\|.$$

Exercice 34. (inégalité de Hölder)

Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) Soient a_1, \dots, a_n des nombres réels positifs, et soit

$$\Sigma = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^q = 1 \right\}.$$

Justifier l'existence de

$$M = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma} \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

(2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i x_i = M$.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel μ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i = \mu x_i^{q-1}.$$

(b) Montrer qu'on a $M = \mu$, puis que $x_i^q = \left(\frac{a_i}{M}\right)^p$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) En déduire la valeur de M .

(3) Déduire de (2) que si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels positifs, alors

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

(4) Dans cette question, on veut donner une autre démonstration de (*).

(a) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que si $a, b \geq 0$, alors

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

(b) En déduire que (*) est vraie si $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^n b_i^q$.

(c) Conclure.

Exercice 35. (inégalité arithmético-géométrique)

Dans tout l'exercice, on fixe des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_i > 0$ pour tout i et $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

(1) Soit $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1\}$. Justifier l'existence de

$$M = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma} x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}.$$

- (2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ tel que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = M$.
- (a) Montrer que tous les x_i sont strictement positifs.
 - (b) Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i^{\alpha_i - 1} = \frac{\lambda}{\prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j}}.$$

(c) Montrer que tous les x_i sont égaux, puis calculer M .

- (3) Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on a

(*)
$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

- (4) Redémontrer (*) en utilisant la concavité de la fonction logarithme.