

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^2 + 5y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- (1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et calculer ses dérivées partielles en tout point.
- (2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 3. (laplacien, fonctions harmoniques)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Le **laplacien** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est la fonction

$$\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

La fonction f est dite **harmonique** si elle vérifie $\Delta f = 0$.

- (1) Trouver toutes les fonctions harmoniques sur \mathbb{R} .
- (2) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Calculer Δu pour $u(x) = \|x\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.
- (3) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (d'une variable) de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle ouvert I contenant $u(\Omega)$, alors

$$\forall x \in \Omega : \Delta(\varphi \circ u)(x) = \varphi''(u(x)) \|\nabla u(x)\|^2 + \varphi'(u(x)) \Delta u(x).$$

- (4) Soit $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r} \varphi'(r).$$

- (5) Trouver toutes les fonctions f harmoniques sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et **radiales**, i.e. telles que $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

Exercice 4. (laplacien en coordonnées polaires)

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\tilde{f} :]0, \infty[\times \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On rappelle (cf un exercice de la feuille 4) que pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 , on a les formules suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{cases}$$

Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$\tilde{\Delta} f = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 5. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on note f_M la fonction définie par $f_M(x) = f(Mx)$.

(1) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \Delta f_M(x) = \sum_{i,k=1}^n \langle L_i, L_k \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(Mx),$$

où L_1, \dots, L_n sont les lignes de la matrice M et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n .

(2) Que devient cette formule lorsque M est une matrice orthogonale?

Exercice 6. (harmonicité et propriété de la moyenne)

Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 . D'autre part, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note e_θ le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par $e_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(H1) f est harmonique, i.e. $\Delta f = 0$.

(H2) $\forall p \in \mathbb{R}^2 \forall r > 0 : f(p) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$.

(1) Soit $p \in \mathbb{R}^2$ fixé.

(a) Montrer qu'on a $\int_0^{2\pi} Df(p)e_\theta d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} D^2 f(p)(e_\theta, e_\theta) d\theta = \pi \Delta f(p)$.

(b) En déduire que lorsque r tend vers 0, on a

$$\int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) d\theta = 2\pi f(p) + \frac{\pi r^2}{2} \Delta f(p) + o(r^2).$$

(c) Montrer que (H2) entraîne (H1).

(2) Soit à nouveau $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) d\theta.$$

- (a) On pose $\tilde{f}(r, \theta) = f(p + re_\theta) = f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$. Exprimer $\varphi'(r)$ et $\varphi''(r)$ à l'aide des dérivées partielles de \tilde{f} .
- (b) En utilisant la formule pour le laplacien en coordonnées polaires (exercice 4), montrer qu'on a

$$\int_0^{2\pi} \Delta f(p + re_\theta) d\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi'(r)).$$

- (c) Montrer que (H1) entraîne (H2).

Exercice 7. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(E) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

- (1) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et soit $g = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(u, uv)$.
- (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide de g .
- (b) Pour $(u, v) \in \Omega$, exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)$ à l'aide des dérivées partielles de f et de $(x, y) = (u, uv)$.
- (2) Déterminer les solutions de (E).

Exercice 8. (équation des ondes)

Soit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

- (1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie $a \frac{\partial g}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si et seulement si elle est de la forme $g(x, y) = \varphi(-bx + ay)$, où φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . (Pour le sens "non évident", on pourra considérer la fonction \tilde{g} définie par $\tilde{g}(u, v) = g(av - bu, bv + au)$ et calculer $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial v}$).
- (2) Soit f une solution de (E). Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $g = \frac{\partial f}{\partial x} + c \frac{\partial f}{\partial y}$ soit de la forme $g(x, y) = \varphi(y + cx)$.
- (3) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \varphi(y + cx)$.
- (a) On pose $f_0(x, y) = \frac{1}{2c} \int_0^{y+cx} \varphi(s) ds$. Calculer $\frac{\partial f_0}{\partial x} + c \frac{\partial f_0}{\partial y}$.
- (b) Déterminer toutes les solutions \mathcal{C}^1 de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + c \frac{\partial f}{\partial y} = g$.
- (4) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme $f(x, y) = u(y - cx) + v(y + cx)$, où u et v sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Exercice 9. (équation de la chaleur)

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes. Soit également $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Justifier la définition, puis montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur Ω et vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Exercice 10. (champs gradients; lemme de Poincaré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Un **champ de vecteurs** sur Ω est une application $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, qu'on notera toujours

$$V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un champ de vecteurs V sur Ω est un **champ gradient** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = V$.

- (1) Soit V un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur Ω . Montrer que si V est un champ gradient, alors on doit avoir

$$(*) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \partial_j v_i = \partial_i v_j.$$

- (2) On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n . Montrer que si V est un champ gradient sur Ω , alors on a

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = 0$$

pour toute application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma(b) = \gamma(a)$.

- (3) Dans cette question, on prend $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et on définit V sur Ω par

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Montrer V vérifie $(*)$ mais n'est pas un champ gradient.

- (4) Dans cette question, on suppose que l'ouvert Ω est **étoilé** par rapport à un certain point p , ce qui signifie qu'on a $[p, x] \subset \Omega$ pour tout $x \in \Omega$. Soit V un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur Ω et vérifiant $(*)$.

- (a) On écrit $p = (p_1, \dots, p_n)$ et on définit une fonction $\Phi : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(t, x) = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) v_i(p + t(x - p)).$$

Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t, x) = v_j(p + t(x - p)) + t \frac{\partial}{\partial t} \left[v_j(p + t(x - p)) \right].$$

(b) En déduire que pour $x \in \Omega$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$v_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t, x) dt.$$

(c) Conclure que V est un champ gradient.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ si $x \neq y$ et $g(x, x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x, y)$ par une formule intégrale, puis montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 12. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $(0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^x \cos(3x + 2y)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0, 0) = 0$ et $Df(0, 0) = 0$.

(1) En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe trois fonctions continues a, b, c sur \mathbb{R}^2 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = x^2 a(x, y) + xy b(x, y) + y^2 c(x, y).$$

(2) Exprimer $a(0, 0)$, $b(0, 0)$ et $c(0, 0)$ à l'aide des dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$.

(3) On suppose que la matrice hessienne $H_f(0, 0)$ vérifie $\det H_f(0, 0) < 0$, et qu'on a de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) > 0$.

(a) Pourquoi existe-t-il un voisinage W de $(0, 0)$ tel que $a(x, y) > 0$ et $b(x, y)^2 > 4a(x, y)c(x, y)$ pour tout $(x, y) \in W$?

(b) Montrer qu'il existe deux fonctions u et v continues sur W telles que $u(0, 0) = 0 = v(0, 0)$ et

$$\forall (x, y) \in W : f(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2.$$