Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, exprimer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(tx)$ à l'aide des dérivées partielles de f.

Exercice 2. Soient E et F des evn, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, $u : \mathbb{R} \to E$ dérivable et $f : E \to F$ différentiable. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \alpha(t)f(u(t))$ (en fonction de α, α', u, u' et Df).

Exercice 3. Soit E un evn. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_k : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $P_k(X) = X^k$.

(1) On définit $B : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ par $B(X, Y) = XY$. Exprimer P_{k+1} à l'aide de B et de P_k.

(2) En utilisant (1), montrer par récurrence sur k que P_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}(E)$ et que pour $X, H \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$DP_k(X)H = \sum_{j=0}^{k-1} X^j H X^{k-1-j}\,.$$

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$. Montrer que $h(x, y) = f(xy) + g(x/y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω à préciser, et calculer ses dérivées partielles (en fonction de f' et g').

Exercice 5. Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\theta = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \int_0^{\theta(x,y,z)} \varphi(t)\, dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles (en fonction de celles de θ).

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle\, e^{-\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

(1) En utilisant le théorème des fonctions composées, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

(2) Retrouver les résultats de (1) en utilisant les dérivées partielles.

Exercice 7. (fonctions homogènes)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **homogène de degré** λ si on a

$$f(tx) = t^\lambda f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t > 0$.

(1) Montrer qu'une fonctions continue sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré 0 si et seulement si elle est constante.
(2) En utilisant l'exercice 1, montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) f est homogène de degré λ;
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} x_j \, \partial_j f(x) = \lambda f(x)$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad x \, \frac{\partial f}{\partial x} + y \, \frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + y^4)^{1/2}.$$

(1) En utilisant l'exercice 7, déterminer les solutions de l'équation "homogène" $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
(2) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto (x^4 + y^4)^{1/2}$ est homogène de degré λ à préciser, et en déduire une solution particulière de (E).
(3) Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 9. Soient E et F des evn, $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire continue, et $f : E \to F$ différentiable. On suppose que pour tout $x \in E$, on a

$$Df(x)\, x = B(x, x).$$

(1) Soit $x \in E$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to E$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(tx)$. Vérifier qu'on a $\varphi'(t) = t\, B(x, x)$ pour tout $t > 0$.
(2) On pose $c = f(0)$. Montrer qu'on a $f(x) = c + \frac{1}{2}B(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 10. Soit $C \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = C\,.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$g(u, v) = f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{-u + v}{2}\right).$$

   (a) Exprimer $f(x, y)$ à l'aide de g.
   (b) Calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ en fonction des dérivées partielles de f.
(2) Soit $c \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $g(u, v)$ différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $\frac{\partial g}{\partial u} = c$.
(3) Conclure qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction dérivable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{C}{2}\,(x - y) + \varphi(x + y)$.

Exercice 11. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer qu'une fonction f différentiable sur $\mathbb{R}^2$ est solution de l'équation aux dérivées partielles $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si elle est de la forme $f(x,y) = \varphi(-bx+ay)$, où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. (*Poser* $\Delta = a^2+b^2$, $g(u,v) = f\left(\frac{au-bv}{\Delta}, \frac{-bu+av}{\Delta}\right)$, *et raisonner comme dans l'exercice 10*).

Exercice 12. Soit $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et soit $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ différentiable. On note $H \subset \mathbb{R}^n$ l'hyperplan orthogonal à a, et on choisit une base $(h_1,\dots,h_{n-1})$ de H. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g(\langle x,h_1\rangle, \dots \langle x,h_{n-1}\rangle)$ vérifie $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$.

Exercice 13. (coordonnées polaires)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, et soit $\widetilde{f} :]0,\infty[\times\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\widetilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

(1) Montrer que $\widetilde{f}$ est différentiable et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
(2) Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de $\widetilde{f}$.

Exercice 14. (gradient d'une fonction radiale)
Soit $\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\nabla f(x) = \varphi'(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}\,\cdot$$

Exercice 15. (divergence d'un champ de vecteurs radial)
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et soit $V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$V(x) = \varphi(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}\,\cdot$$

(1) Pourquoi V est-elle différentiable?
(2) On pose $\nabla \cdot V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, où $v_1,\dots,v_n$ sont les composantes de V. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\nabla \cdot V(x) = \varphi'(r) + \frac{n-1}{r}\,\varphi(r)\,.$$

Exercice 16. Soit $f(t,y)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en tout point $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(1) On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $F(u,v,w) = \int_u^v f(t,w)\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles.
(2) Soient $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, c(x))\,dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une formule pour sa dérivée.

Exercice 17. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit $g = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt\,.$$

Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$.

Exercice 18. Dans tout l'exercice, on se donne une *loi de groupe* sur $\mathbb{R}$, autrement dit une application $(x,y) \mapsto x * y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $x * (y * z) = (x * y) * z$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$;
(ii) il existe un (unique) $e \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}\ :\ z * e = z = e * z$;
(iii) tout élément $x \in \mathbb{R}$ possède un "inverse" noté x^{-1}, qui est l'unique $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x * y = e = y * x$.

On note $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\pi(x,y) = x * y$, et on suppose que π est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Écrire la propriété (i) en utilisant l'application π, et en déduire que pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\partial_2\pi(x * y, z) = \partial_2\pi(x, y * z) \times \partial_2\pi(y, z)\,.$$

(2) Montrer que $\forall z \in \mathbb{R}\ :\ \partial_1\pi(z, e) = 1 = \partial_2\pi(e, z)$.
(3) En utilisant (1) et (2), montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\ :\ \partial_2\pi(y^{-1}, y) \times \partial_2\pi(y, e) = 1$.
(4) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t) = \int_e^t \frac{1}{\partial_2\pi(s,e)}\,ds\,.$$

(a) Justifier la définition, puis montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une formule pour $\varphi'(t)$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $y \mapsto \varphi(\pi(x,y)) - \varphi(y)$ est constante.
(c) En déduire que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)\,.$$

(5) Déduire de (4) que le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est *commutatif* : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$x * y = y * x\,.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qu'on notera $(p, v, t) \mapsto f(p, v, t)$. On suppose que les dérivées partielles de f ne s'annulent en aucun point. Soient également P, V, T trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'on notera $(v, t) \mapsto P(v, t)$, $(p, t) \mapsto V(p, t)$ et $(p, v) \mapsto T(p, v)$. On suppose que pour tout point $(p, v, t) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(p, v, T(p, v)) = f(p, V(p, t), t) = f(P(v, t), v, t) = 0\,.$$

(1) Dériver la relation $f(p, v, T(p, v)) = 0$ par rapport à p, puis exprimer $\frac{\partial T}{\partial p}$ à l'aide des dérivées partielles de f.
(2) Exprimer $\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\frac{\partial P}{\partial v}$ à l'aide des dérivées partielles de f.
(3) Montrer que si p, v, t vérifient $p = P(v, t)$, $v = V(p, t)$ et $t = T(p, v)$, alors

$$\frac{\partial P}{\partial v}(v, t) \times \frac{\partial V}{\partial t}(p, t) \times \frac{\partial T}{\partial p}(p, v) = -1\,.$$

Exercice 20. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'exercice 3, montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\|B^k - A^k\| \leq k \max(\|A\|, \|B\|)^{k-1} \|B - A\|$.

Exercice 21. Soient E et F deux evn et soit $f : E \to F$ une application différentiable. On supose que f est bornée sur toute partie bornée de E et vérifie $\lim_{\|x\| \to \infty} \|Df(x)\| = 0$. Montrer qu'on a $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$.

Exercice 22. Soient E et F deux evn, soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application continue sur E et différentiable sur $E \setminus \{a\}$. On suppose que $Df(x)$ admet une limite L dans $\mathcal{L}(E, F)$ quand $x \to a$. Montrer que f est différentiable en a, avec $Df(a) = L$.

Exercice 23. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)\sin(ky)}{k^3} \cdot$ Justifier la définition et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 24. En utilisant les exercices 3 et 20, montrer que l'application $X \mapsto e^X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $M_n(\mathbb{R})$, et que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|e^B - e^A\| \leq \max(e^{\|A\|}, e^{\|B\|}) \|B - A\|\,.$$

Exercice 25. Pour $X \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\sin(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Justifier la définition, montrer que l'application sin est de classe $\mathcal{C}^1$, et montrer que pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\|\sin(B) - \sin(A)\| \leq \max(\operatorname{ch}\|A\|, \operatorname{ch}\|B\|) \times \|B - A\|$.

Exercice 26. Soit E un evn et soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit également $a \in E$. On suppose qu'on a $f(a) = a$ et $\|Df(a)\| < 1$.

(1) Montrer qu'on peut trouver $r > 0$ et $k < 1$ tels que
$$\forall x, y \in B(a, r) \ : \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| .$$
(2) Montrer que la boule $B(a, r)$ est stable par f.
(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f^n = f \circ \cdots \circ f$. Montrer que pour tout point $x_0 \in B(a, r)$, la suite $(x_n) = (f^n(x_0))$ converge vers a, et donner une majoration de $\|x_n - a\|$ en fonction de k, n et $\|x_0 - a\|$.

Exercice 27. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On définit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ par
$$f(X) = 2X - XAX .$$
(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer $Df(A^{-1})$.
(2) Montrer qu'on peut trouver $r > 0$ tel que : pour toute matrice X_0 vérifiant $\|X_0 - A^{-1}\| < r$, la suite $(f^n(X_0))$ converge vers A^{-1}.