Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soient E et F deux evn, et soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit également $\alpha > 1$. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \|L(u)\|^\alpha$ est différentiable en 0.

Exercice 2. Soient E, F_1, F_2, G des evn, $u : E \to F_1$, $v : E \to F_2$ et $B : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue. On définit $f : E \to G$ par $f(x) = B(u(x), v(x))$. Enfin, soit $a \in E$. On suppose que u est différentiable en a, que $u(a) = 0$ et que v est continue en a. Montrer que f est différentiable en a avec $Df(a) = 0$.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn dont la norme dérive d'un produit scalaire, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \|x\|^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
(2) Montrer f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4. Soit E un evn, et soit $f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $f(X) = X^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$, et trouver sa différentielle.
(2) En observant que l'application $Df : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ est linéaire, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. On rappelle que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id + H \in GL(E)$. On rappelle également que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

(1) Montrer que si $X \in GL(E)$ et si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1/\|X^{-1}\|$, alors $X + H \in GL(E)$. En déduire que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
(2) Montrer que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur $GL(E)$ et donner l'expression de sa différentielle.
(3) Montrer que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $F : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par $F(u) = \varphi \circ u$.

(1) Soit $u \in \mathcal{C}([0,1])$ et soit $h \in \mathcal{C}([0,1])$ vérifiant $\|h\|_\infty \leq 1$. On pose $M = 1 + \|u\|_\infty$ et $\varepsilon(h) = \sup\{|\varphi'(t) - \varphi'(s)|;\ s, t \in [-M, M]\ ,\ |t - s| \leq \|h\|_\infty\}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|F(u+h)(x) - F(u)(x) - \varphi'(u(x))\, h(x)| \leq \|h\|_\infty \times \varepsilon(h)\,.$$

(2) Montrer que F est différentiable sur $\mathcal{C}([0,1])$ et que pour $u, h \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $DF(u)h = (\varphi' \circ u) \times h$.
(3) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$ et $f(x, x^2) = 1$ pour tout $x \neq 0$.
(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
(2) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la fonction $x \mapsto \|x\|$ n'est dérivable en 0 dans aucune direction.

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On note $N : E \to \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto \|u\|$. On pose également $S_E = \{u \in E;\ \|u\| = 1\}$. Enfin, pour tout $x \in E$ on pose

$$J(x) = \{\Theta \in E^*;\ \|\Theta\| \leq 1 \text{ et } \Theta(\xi) = \|\xi\|\}\,.$$

(1) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Montrer que N est différentiable en tout point $\xi \in S_E$ et déterminer $dN(\xi)$.
(2) Dans cette question E est quelconque. On veut établir le résultat suivant : *Si N est différentiable en un point $\xi \in S_E$, alors $J(\xi)$ est réduit à un point, et plus précisément $J(\xi) = \{dN(\xi)\}$.* On fixe donc $\xi \in S_E$ tel que N est différentiable en ξ.
   (a) Montrer que pour tout $h \in E \setminus \{0\}$ et pour tout $t > 0$, on a
   $$\left| \frac{N(\xi + th) - N(\xi)}{t} \right| \leq \|h\|\,,$$
   et en déduire que $\|dN(\xi)\| \leq 1$.
   (b) Calculer $N(\xi + t\xi)$ pour tout $t > 0$, et en déduire que $dN(\xi)\xi = 1$.
   (c) Soit $\Theta \in J(\xi)$. Montrer que si $h \in E$, alors $\Theta(\xi + th) - N(\xi + th) \leq 0$ pour tout $t > 0$ et $\Theta(\xi + th) - N(\xi + th) = t\,(\Theta(h) - dN(\xi)h) + o(t)$ quand $t \to 0^+$. En déduire que $\Theta(h) \leq dN(\xi)h$ pour tout $h \in E$.
   (d) Conclure.
(3) Dans cette question, on suppose que l'espace E est de dimension finie. On veut établir le résultat suivant : *Si $\xi \in S_E$ et si $J(\xi)$ est réduit à un point, alors N est différentiable en ξ.* On fixe donc $\xi \in S_E$ tel que $J(\xi)$ est réduit à un point $\{\Theta\}$.
   (a) Montrer que si (Φ_k) est une suite dans E^* convergeant vers $\Phi \in E^*$ et si $(x_k) \subset E$ converge vers ξ, alors $\Phi_k(x_k) \to \Phi(\xi)$.
   (b) En utilisant convenablement le théorème de Bolzano-Weierstrass, déduire de (a) que si $(\xi_n) \subset E$ est une suite convergeant vers ξ et si on choisit $\Theta_n \in J(\xi_n)$, alors $\Theta_n \to \Theta$.

(c) On suppose que N n'est pas différentiable en ξ. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(h_n) \subset E \setminus \{0\}$ tendant vers 0 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \|\xi + h_n\| - \Theta(\xi + h_n) \geq \varepsilon_0 \|h_n\| \,.$$

(d) Avec les notations de (c), montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et si $\Theta_n \in J(\xi + h_n)$, alors $\Theta_n(\xi) \leq \Theta(\xi)$ et $\Theta_n(h_n) - \Theta(h_n) \geq \varepsilon_0 \|h_n\|$. En déduire une minoration pour $\|\Theta_n - \Theta\|$.

(e) Conclure.

(4) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$.

(a) Pour $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\Theta_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Theta_b(x) = \sum_1^n b_j x_j$. Montrer qu'on a $\|\Theta_b\| = \|b\|_1$.

(b) Déterminer les points $\xi \in S_E$ où N est différentiable.

Exercice 10. Montrer que la formule $g(x, y) = xy + x\sqrt{2 - y^2}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à préciser.

Exercice 11. Écrire les matrices Jacobiennes des applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y, z) = (xy\cos(y^3 z), e^{z^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2})$ et $g(x, y) = (x^3 \log(3 + x^4 y^4), e^{\sqrt{1+x^2y^2}})$.

Exercice 12. Soit $\alpha > 0$. Étudier la différentiabilité de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0, 0) = 0$ et $f(x, y, z) = |xyz|^\alpha \log(x^2 + y^2 + z^2)$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Exercice 13. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p + q > 3$.

Exercice 14. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x, y) = |xy|^\alpha$.

(1) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0, y \neq 0\}$.
(2) Montrer que f_α est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
(3) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 15. Pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(0, 0) = 0$ et $f_\alpha(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

(1) Montrer que f_α possède des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.
(2) Montrer que si $\alpha < 1/2$, alors f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
(3) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 16. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_k(0,0) = 0$ et $f_k(x,y) = x^k \cos\left(\frac{1}{x^4+y^4}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) Pour quelles valeurs de k la fonction f_k est-elle différentiable?
(2) Pour quelles valeurs de k est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$.

(1) Montrer que f possède des dérivées partielles en tout point $(0,y)$ et calculer ces dérivées partielles.
(2) Déterminer les points de différentiabilité de f.

Exercice 18. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(0,y) = (0,0)$ et $f(x,y) = \left(\sqrt{y}\, x^2 \cos(1/x^3), \sqrt{y}\, x^2 \sin(1/x^3)\right)$ si $x \neq 0$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega^* = \{(x,y) \in \Omega;\ x \neq 0\}$.
(2) Montrer que si $a = (0, y_0) \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{R}^2$ vérifie $a + h \in \Omega$, alors

$$\|f(a+h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 \sqrt{y_0 + \|h\|_\infty}\,.$$

En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec $Df(x,y) = 0$ si $x = 0$.
(3) Montrer que le déterminant Jacobien $J_f(x,y) = \det(\mathrm{Jac}_f(x,y))$ prend exactement deux valeurs sur Ω.

Exercice 19. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer son gradient.

Exercice 20. Soit $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $I(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$, et que si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifie $\|a\| = 1$, alors $DI(a)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à a.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point, et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.