

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On suppose que la fonction $t \mapsto \|\gamma(t)\|_2$ est constante. Montrer que $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $M : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Donner une formule pour la dérivée de $\varphi(t) = M(t)^3$.

Exercice 3. (dérivée d'un "multi-produit")

- (1) Soient $u_1, u_2, u_3 : I \rightarrow F$ des fonctions dérivables, où I est un intervalle de \mathbb{R} et F un evn. Soit également $P : F \times F \times F \rightarrow G$ une application 3-linéaire continue, où G est un autre evn. Montrer que l'application $t \mapsto P(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ est dérivable, et trouver une formule pour sa dérivée.
- (2) Généraliser au cas de n fonctions $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow F$ et d'une application n -linéaire continue $P : F \times \dots \times F \rightarrow G$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ si $x \neq y$ et $g(x, x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (1) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que g est continue sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Redémontrer ce résultat en utilisant uniquement le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 5. (théorème de Peano)

- (1) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et soient $u, v, w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'on peut trouver un point $c \in]a, b[$ tel que

$$\det \begin{pmatrix} u'(c) & v'(c) & w'(c) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \end{pmatrix} = 0$$

- (2) Utiliser (1) pour démontrer la "formule des accroissements finis généralisée": si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, et si $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a, b[$, alors on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Exercice 6. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow F$ une fonction dérivable.

(1) Montrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $t \geq A$, on a

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(A)\| + (t - A) \sup_{s \geq A} \|\varphi'(s)\|.$$

(2) Montrer que si on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$.

Exercice 7. Soit F un evn et soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow F$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, \infty[$. On suppose que $\varphi'(t)$ admet une limite $\xi \in F$ quand $t \rightarrow 0^+$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, on peut trouver $c_t \in]0, t[$ tel que

$$\|\varphi(t) - \varphi(0) - t\xi\| \leq t \|\varphi'(c_t) - \xi\|.$$

(2) Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \xi$.

Exercice 8. (une autre preuve de l'inégalité des AF)

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ une fonction dérivable telle que $\|\varphi'(t)\| \leq M$ sur $[a, b]$. Le but de l'exercice de montrer qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M(b - a)$ en utilisant une méthode différente de celle vue en cours pour démontrer l'inégalité des accroissements finis.

(1) Soit $K > M$ fixé. On pose $J_K = \{t \in [a, b]; \|\varphi(t) - \varphi(a)\| \leq K(t - a)\}$.

(a) Montrer que si $t \in [a, b[$, alors $\|\varphi(t + h) - \varphi(t)\| \leq Kh$ pour tout $h > 0$ assez petit.

(b) En déduire que si $t \in J_K$ et $t < b$, alors on peut trouver un point $s \in J_K$ avec $s > t$.

(c) En considérant $t_0 = \sup J_K$, montrer que $b \in J_K$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 9. (inégalité des accroissements finis "généralisée")

Soient F un espace vectoriel normé, $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , et $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ et $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que φ est dérivable sur $]a, b[$ et qu'on a

$$\forall t \in]a, b[: \|\varphi'(t)\| \leq \rho(t).$$

(1) On pose $R(t) = \int_a^t \rho(s) ds$. Montrer que si $\Theta \in F^*$ vérifie $\|\Theta\| \leq 1$, alors la fonction $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \Theta(\varphi(t)) - R(t)$ est décroissante sur $[a, b]$. En particulier, on a $\psi(b) - \psi(a) \leq 0$.

(2) En utilisant le lemme de scalarisation, déduire de (1) qu'on a

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq \int_a^b \rho(t) dt.$$

(3) Redémontrer en 3 lignes le résultat de (2) lorsque φ est supposée de classe \mathcal{C}^1 et que F est complet.

Exercice 10. Soient F un espace de Banach et soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|\varphi'(t)\| \leq k \|\varphi(t)\|$ pour tout $t \geq 0$.

- (1) On pose $a = \|\varphi(0)\|$ et $u(t) = \|\varphi(t)\|$. Montrer qu'on a $u(t) \leq a + k \int_0^t u(s) ds$ pour tout $t \geq 0$.
- (2) On pose maintenant $v(t) = a + k \int_0^t u(s) ds$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-kt}v(t)$ est décroissante sur $[0, \infty[$.
- (3) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{kt}$.

Exercice 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.

- (1) Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la dérivée de l'application $p_k : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $p_k(t) = t^k A^k$?
- (2) Montrer que l'application $t \mapsto e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et qu'on a

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

Exercice 12. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$.

- (1) Montrer que A et B commutent avec e^{tA} , e^{tB} et $e^{t(A+B)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (2) En utilisant (1) et l'exercice 11, montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$ est constante.
- (3) Montrer qu'on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 13. (déterminant d'une exponentielle)

- (1) Soit $X : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application dérivable. On pose $\varphi(t) = \det X(t)$.
 - (a) Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} et que si on note $X_1(s), \dots, X_n(s)$ les colonnes de la matrice $X(t)$, alors on a pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(s) = \det(X_1'(s), X_2(s), \dots, X_n(s)) + \dots + \det(X_1(s), X_2(s), \dots, X_n'(s)).$$
 - (b) En déduire que si $t \in \mathbb{R}$ vérifie $X(t) = Id$, alors $\varphi'(t) = \varphi(t) \times \text{tr}(X'(t))$.
 - (c) On suppose que $X(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \text{tr}(X(t)^{-1}X'(t)).$$

- (2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. En considérant $X(t) = e^{tA}$, montrer qu'on a

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}.$$

Exercice 14. (groupes à un paramètre)

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $\Phi(0) = I$ et $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R} : \Phi(t) = e^{tA}$

- (1) Quelle est la limite de $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \Phi(s) ds$ quand δ tend vers 0^+ ?
- (2) Dédire de (1) qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que la matrice $M(\delta) = \int_0^\delta \Phi(s) ds$ est inversible.
- (3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_t^{t+\delta} \Phi(u) du = M(\delta)\Phi(t)$, et en déduire que Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- (4) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (5) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : [a, b] \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^2 , avec $\varphi'(a) = 0 = \varphi'(b)$. On pose $M = \sup_{s \in [a, b]} \|\varphi''(s)\|$.

- (1) Pour $t \in [a, b]$, majorer $\|\varphi(t) - \varphi(a)\|$ et $\|\varphi(t) - \varphi(b)\|$ à l'aide de M .
- (2) En déduire qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 16. Soit F un espace de Banach, soit $a > 0$ et soit $\varphi : [-a, a] \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^2 . On pose $M = \sup_{s \in [-a, a]} \|\varphi''(s)\|$.

- (1) Soit $t \in [-a, a]$. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $\varphi(a) - \varphi(t)$ et $\varphi(-a) - \varphi(t)$.
- (2) Montrer que pour tout $t \in [-a, a]$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{\|\varphi(a) - \varphi(-a)\|}{2a} + M \frac{a^2 + t^2}{2a}.$$

Exercice 17. Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que φ et φ'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\varphi(s)\|$ et $M_2 = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\varphi''(s)\|$.

- (1) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Majorer $\|\varphi(t+h) - \varphi(t) - h\varphi'(t)\|$ à l'aide de M_2 pour tout $h \in \mathbb{R}$, et en déduire que pour tout $h > 0$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{M_2}{2} h + \frac{2M_0}{h}.$$

- (2) Montrer qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive de classe \mathcal{C}^2 . On note $Z(f)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : la fonction $g = \sqrt{f}$ est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si f'' s'annule en tout point de $Z(f)$.

- (1) Pourquoi g est-elle de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus Z(f)$?
- (2) Si $x_0 \in Z(f)$, quelle est la valeur de $f'(x_0)$?
- (3) Soit $x_0 \in Z(f)$. A l'aide d'un développement limité, montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$, et qu'on a alors $g'(x_0) = 0$.
- (4) Soit $x_0 \in Z(f)$ tel que $f''(x_0) = 0$. Soit également $\alpha > 0$. On pose $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et $M_\alpha = \sup\{|f''(t)|; |t - x_0| \leq 2\alpha\}$.

(a) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que si $x \in I_\alpha$, alors

$$\forall h \in [-\alpha, \alpha] \quad \frac{M_\alpha}{2} h^2 + f'(x)h + f(x) \geq 0.$$

(b) On suppose $M_\alpha > 0$. En utilisant (2) et l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour $x \in I_\alpha$ fixé, le point où le polynôme du second degré $\frac{M_\alpha}{2}h^2 + f'(x)h + f(x)$ atteint son minimum appartient à l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$.

(c) Dédurre de (a) et (b) que si $x \in I_\alpha$, alors $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_\alpha f(x)}$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 19. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\varphi(0) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'on peut écrire $\varphi(t) = t\psi(t)$, où ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 20. Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^{r+1} , où F est un espace de Banach. En utilisant uniquement la formule de Taylor, montrer que φ admet un développement limité d'ordre r en tout point $t_0 \in \mathbb{R}$; autrement dit qu'on peut écrire, quand $h \rightarrow 0$:

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + h\varphi'(t_0) + \dots + h^r \frac{\varphi^{(r)}(t_0)}{r!} + o(|h|^r).$$

Exercice 21. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi : [0, \varepsilon] \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 , où F est un espace de Banach. On suppose qu'on a $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ et $\|\varphi'''(t)\| \leq 1 + t^2$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $\|\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)\| \leq \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon^5}{60}$.

Exercice 22. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , où F est un espace de Banach. On suppose qu'il existe une constante C et une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $\|\varphi^{(k)}(t)\| \leq C^k k! \alpha(t)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout t . Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}[$, on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(0),$$

où la série converge dans F .

