Feuille d'exercices n^o 1

Exercice 1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|u\|_\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1$.

Exercice 2. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose $\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|\,dt$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$, qu'il existe une constante C telle que $\|\cdot\|_1 \leq C\,\|\cdot\|_\infty$, mais que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Soit E un evn, et soit $M \subset E$ un sous-espace de dimension finie. Pour $x \in E$, on pose $\mathrm{dist}(x,M) = \inf\{\|x-v\|;\ v \in M\}$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que pour tout $x \in E$, on peut trouver un point $v \in M$ tel que $\mathrm{dist}(x,M) = \|x-v\|$.

Exercice 4. (théorème de Riesz)
Soit E un evn de dimension *infinie*. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une suite bornée $(u_k) \subset E$ qui ne possède aucune sous-suite convergente.

(1) Soit $M \subset E$ un sous-espace de dimension finie, et soit $x \in E \setminus M$. Soit également $v \in M$ tel que $\mathrm{dist}(x,M) = \|x-v\|$ (exercice 3). Montrer que si on pose $u = \frac{x-v}{\|x-v\|}$, alors $\mathrm{dist}(u,M) \geq 1$.
(2) Déduire de (1) qu'on peut construire par récurrence une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\|u_k\| = 1$ pour tout k et $\|u_k - u_j\| \geq 1$ pour tout $k \geq 1$ et pour tout $j < k$.
(3) Conclure.

Exercice 5. Soit E un evn, et soit A une partie non-vide de E. Pour $u \in E$ on pose $\mathrm{dist}(u,A) = \inf\{\|u-z\|;\ z \in A\}$. Montrer que l'application $u \mapsto \mathrm{dist}(u,A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 6. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Montrer qu'il n'est pas possible de prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie l en $\pm\infty$. On définit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = (x+y)f\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $g(x,0) = lx$.

(1) Pourquoi g est-elle continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$?
(2) Montrer que g est continue en tout point $(a,0)$, $a \neq 0$.
(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que g est également continue en $(0,0)$.

Exercice 10. Soit E un evn. Montrer que si $(u_k) \subset E$ est une suite de Cauchy possédant une sous-suite convergente, alors (u_k) est convergente.

Exercice 11. Soit E un evn. On suppose que toute série normalement convergente à termes dans E est convergente. Le but de l'exercice est de montrer que E est complet.

(1) Soit (u_k) une suite de Cauchy dans E. Montrer que (u_k) possède une sous-suite (v_k) telle que $\|v_{k+1} - v_k\| \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(2) Conclure en utilisant l'exercice 10.

Exercice 12. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constituée par toutes les suites de nombres réels $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x(j)$ est absolument convergente. Pour $u = (x(j)) \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |x(j)|\,.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 13. Soit $v \in \mathcal{C}([0,1])$. Montrer que l'application $u \mapsto \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 14. Soit $\mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\| = \sup\{|P(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$, et que la forme linéaire $P \mapsto P(6)$ n'est pas continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\Theta_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Theta_b(x_1, \ldots, x_n) = \sum_1^n b_j x_j$. Montrer que $\|\Theta_b\| = \|b\|_\infty$.

Exercice 16. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Exercice 17. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{M^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. La somme de cette série s'appelle l'**exponentielle** de la matrice M et se note e^M : on a donc par définition

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \,\cdot$$

Exercice 18. Soient E et F deux evn, et soit $L : E \to F$ une application continue et *additive*, c'est-à-dire vérifiant $L(u+v) = L(u) + L(v)$ pour tous $u, v \in E$.

(1) Montrer qu'on a $L(nu) = nL(u)$ pour tout $u \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que $L(ru) = rL(u)$ pour tout u et pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que L est linéaire.

Exercice 19. Soit E et F deux evn, avec F complet. Soit également $f : E \to F$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\|f(u+v) - f(u) - f(v)\| \leq C$$

pour tous $u, v \in E$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que $\|L(u) - f(u)\| \leq C$ pour tout $u \in E$.

(1) Soit $u \in E$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\| \frac{f(2^k u)}{2^k} - \frac{f(2^{k-1}u)}{2^{k-1}} \right\| \leq \frac{C}{2^k} \,\cdot$
(2) Montrer que pour tout $u \in E$, la suite $\left(\frac{f(2^k u)}{2^k}\right)_{k \geq 1}$ converge dans F, et que la convergence est uniforme par rapport à u.
(3) On définit une application $L : E \to F$ en posant

$$L(u) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(2^k u)}{2^k} \,.$$

Montrer que L convient en utilisant l'exercice 18.

Exercice 20. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments *inversibles* de $\mathcal{L}(E)$, autrement dit l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(E)$ qui sont bijectives et telles que l'application linéaire L^{-1} est continue. Montrer que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H \in GL(E)$ et

$$(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k \,,$$

où la série converge dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 21. On garde les notations de l'exercice 20

(1) Montrer que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $\|(Id-H)^{-1}\| \leq 1/(1-\|H\|)$.
(2) Montrer que si $A, L \in GL(E)$ et si $\|L - A\| \leq 1/2\|A^{-1}\|$, alors $\|L^{-1}\| \leq 2\,\|A^{-1}\|$. (*Écrire* $L = A(Id - H)$).
(3) Montrer que si $A, L \in GL(E)$, alors $L^{-1} - A^{-1} = L^{-1}(A - L)A^{-1}$.
(4) Déduire de (2) et (3) que l'application $L \mapsto L^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 22. Montrer en une ligne (sans utiliser l'exercice 21) que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R}) = GL(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 23. (séries produits)

Soient E, F, G des espaces de Banach, et soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Soient également deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ et $(v_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset F$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} B(u_k, v_{n-k})\,.$$

(1) Montrer que si les deux séries $\sum u_k$ et $\sum v_l$ sont normalement convergentes, alors la série $\sum w_n$ l'est aussi.
(2) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} w_n - B\left(\sum_{k=0}^{N} u_k, \sum_{l=0}^{N} v_l\right) = \sum_{\substack{k,l\in\{0,\ldots,N\}\\ k+l>N}} B(u_k, v_l)\,.$$

(3) En déduire qu'il existe une constante M telle que

$$\forall N \in \mathbb{N}\ :\ \left\|\sum_{n=0}^{N} w_n - B\left(\sum_{k=0}^{N} u_k, \sum_{l=0}^{N} v_l\right)\right\| \leq M\left(\sum_{N/2<k\leq N} \|u_k\| + \sum_{N/2<l\leq N} \|v_l\|\right).$$

(4) Montrer que que si les deux séries $\sum u_k$ et $\sum v_l$ sont normalement convergentes, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \sum_{l=0}^{\infty} v_l\right)\,.$$

Exercice 24. En utilisant l'exercice 23, montrer que si $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $XY = YX$, alors $e^{X+Y} = e^X e^Y$.

Exercice 25. (théorème de Banach-Steinhaus)
Soient E un espace de Banach et F un evn. Soit également $\mathcal{F}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $u \in E$, il existe une constante C_u telle que $\forall L \in \mathcal{F} \; : \; \|L(u)\| \leq C_u$. Le but de l'exercice est de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E,F)$.

(1) Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$ quelconque.
   (a) Montrer que pour tous $u, \xi \in E$, on a
$$\|L(\xi)\| \leq \frac{1}{2}\left(\|L(u+\xi)\| + \|L(u-\xi)\|\right) \leq \max(\|L(u+\xi), L(u-\xi)\|)\,.$$
   (b) Pour $u \in E$ et $r > 0$, on note $\overline{B}(u,r)$ la boule fermée de centre u et de rayon r. Exprimer $\sup\{\|L(\xi)\|;\; \xi \in \overline{B}(0,r)\}$ en fonction de r et de $\|L\|$.
   (c) Déduire de (a) et (b) que pour tous $u \in E$ et pour tout $r > 0$, on a
$$\sup_{u' \in \overline{B}(u,r)} \|L(u')\| \geq r\,\|L\|\,.$$
(2) Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F.
   (a) En utilisant (1), montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ avec $u_0 = 0$, telle que $\|u_n - u_{n-1}\| \leq 3^{-n}$ et $\|L_n(u_n)\| > \frac{2}{3} \times 3^{-n}\|L_n\|$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et que sa limite u vérifie $\|u - u_n\| \leq \frac{1}{2} \times 3^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On suppose qu'on a $\|L_n\| \geq 4^n$ pour tout n. Montrer que $\|L_n(u)\|$ tend vers $+\infty$.
(3) Démontrer par l'absurde le résultat souhaité.

Exercice 26. Soient E un espace de Banach, F un evn, et (L_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $u \in E$, la suite $(L_n(u))$ converge dans F. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer que si on pose $L(u) = \lim L_n(u)$, alors l'application (linéaire) $L : E \to F$ est continue.

Exercice 27. Soient E et F deux evn, et soit $f : E \to F$. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\Theta \in F^*$, la fonction $\Theta \circ f : E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

(1) Pour $u, v \in E$ avec $u \neq v$, on définit une forme linéaire $L_{u,v} : F^* \to \mathbb{R}$ par
$$\forall \Theta \in F^* \;:\; L_{u,v}(\Theta) = \frac{\Theta(f(v)) - \Theta(f(u))}{\|v-u\|}\,.$$
   Montrer que les $L_{u,v}$ sont continues; puis, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall u, v \;:\; \|L_{u,v}\| \leq C$.
(2) Montrer que l'application f est lipschitzienne.

Exercice 28. Soient E, F, G des evn. On dit qu'une application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est *séparément continue* si pour tout $u \in E$ fixé, l'application $v \mapsto B(u,v)$ est continue, et pour tout $v \in F$ fixé, l'application $u \mapsto B(u,v)$ est continue.

(1) Dans cette question, on suppose que E est complet. Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire et séparément continue.

(a) Pour tout $v \in E$, on note $B_v \in \mathcal{L}(E,G)$ l'application linéaire définie comme suit :

$$\forall u \in E \ : \ B_v(u) = B(u,v)\,.$$

Montrer que pour tout $u \in E$, il existe une constante C_u telle que

$$\forall v \in F \ : \ \|B_v(u)\| \leq C_u \, \|v\|\,.$$

(b) En déduire que la famille $\mathcal{F} = \{B_v;\ \|v\| \leq 1\}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E,G)$.

(c) Montrer que B est continue.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}([0,1]) = F$, muni de la norme $\|\cdot\|$ suivante : pour toute $u \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$\|u\| = \int_0^1 |u(t)|\,dt\,.$$

Soit $B : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$B(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\,dt\,.$$

(a) Montrer que B est séparément continue.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n \in \mathcal{C}([0,1])$ la fonction $t \mapsto t^n$. Calculer $B(u_n, u_n)$ et $\|u_n\|$.

(c) La forme bilinéaire B est-elle continue?