Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 8 Janvier 2014

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi : [0, \varepsilon] \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, où F est un espace de Banach. On suppose qu'on a $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ et $\|\varphi'''(t)\| \leq 5 - t$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $\|\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)\| \leq \frac{5\varepsilon^3}{6} - \frac{\varepsilon^4}{24}$.

(2) Soient $\alpha > 0$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^2y^5}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $\alpha < 3$.

(3) Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$vérifiant $\alpha(x,y,z) > 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la formule $f(x,y,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\sqrt{k}\,\alpha(x,y,z)}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

(4) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(3x+4y)\ln\left(\frac{e^{2x}+e^{5y}}{2}\right)$.

(5) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, soit $a \in \mathbb{R}^n$, et soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule ouverte de centre a. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall u \in \overline{B}\, \forall h \in \mathbb{R}^n \ : \ |d^2f(u)(h,h)| \leq M\,\|h\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer ensuite que la fonction g définie par $g(u) = f(u) + \frac{M}{2}\,\|u\|^2$ est convexe sur la boule B.

(6) Soit E un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire, et soient $a_1, \ldots, a_n \in E$. Montrer qu'il existe un unique point $x \in E$ minimisant $\sum\limits_{i=1}^{n} \|x - a_i\|^2$ et déterminer ce point.

(7) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^3 - 4xy - 12z$.

(8) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + \arctan(y), y + \arctan(x))$. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 1. On note $\mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $F : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par

$$\forall u \in \mathcal{C}([0,1]) \ : \ F(u) = \varphi \circ u\,.$$

(1) Soit $u \in \mathcal{C}([0,1])$, et soit $M = 1 + \|u\|_\infty$. Montrer que si $h \in \mathcal{C}([0,1])$ vérifie $\|h\|_\infty \leq 1$, alors

$$\forall x \in [0,1] \ : \ |F(u+h)(x) - F(u)(x) - \varphi'(u(x))\,h(x)| \leq \|h\|_\infty \times \varepsilon(h)\,,$$

où $\varepsilon(h) = \sup\{|\varphi'(t) - \varphi'(s)|;\ s,t \in [-M,M]\ ,\ |t-s| \leq \|h\|_\infty\}$.

(2) Montrer que F est différentiable sur $\mathcal{C}([0,1])$ et que pour $u, h \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $DF(u)h = (\varphi' \circ u) \times h$.

(3) Soit $u \in \mathcal{C}([0,1])$, et soit $M = 1 + \|u\|_\infty$. Montrer que si $v \in \mathcal{C}([0,1])$ vérifie $\|v-u\|_\infty \leq 1$, alors

$$\|\varphi' \circ v - \varphi' \circ u\|_\infty \leq \sup\{|\varphi'(t) - \varphi'(s)|;\ s,t \in [-M,M]\ ,\ |t-s| \leq \|v-u\|_\infty\}\,.$$

En déduire que l'application F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on note $u^* :]0,\infty[\times\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u^*(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

(1) Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $\frac{\partial u^*}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial u^*}{\partial \theta}(r,\theta)$ à l'aide de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, r et θ.

(b) En déduire les formules suivantes :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^* & = \cos\theta\,\dfrac{\partial u^*}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\,\dfrac{\partial u^*}{\partial \theta} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^* & = \sin\theta\,\dfrac{\partial u^*}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\,\dfrac{\partial u^*}{\partial \theta} \end{cases}$$

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Établir la formule

$$(\Delta f)^* = \frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f^*}{\partial \theta^2}\,.$$

(3) *Question hors-barème.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\Delta f = 0$.

(a) Pour $r \geq 0$, on pose $\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f^*(r,\theta)\, d\theta$. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\infty[$, puis montrer en utilisant (2) que la fonction $r \mapsto r\varphi'(r)$ est constante sur $]0,\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $r \geq 0$, on a

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta\,.$$

Exercice 3. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante : pour tous $a, b, c \geq 0$,

$$(*) \qquad \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\,.$$

(1) On pose

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } xy + yz + zx = 1\}$$

et on définit $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)\,.$

(a) Montrer que si $(x,y,z) \in \Sigma$, alors $1 - \frac{1}{4}(y+z)^2 \leq x(y+z) \leq 1$ et $f(x,y,z) \geq x^2(y+z)$.

(b) Soit $\alpha > 0$, et soit $K_\alpha = \{(x,y,z) \in \Sigma;\ f(x,y,z) \leq \alpha\}$. En distinguant les cas $y + z \geq \sqrt{2}$ et $y + z < \sqrt{2}$, montrer que si $(x,y,z) \in K_\alpha$, alors $x \leq \max(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\alpha)$.

(c) Montrer que la fonction f possède un minimum global sur Σ.

(2) Montrer que pour tout $t > 0$, on a $t + \frac{1}{t} \geq 2$. Montrer également que le point $q = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ appartient à Σ et qu'on a $f(q) < 2$. En déduire que si $p = (x,y,z)$ est un point de Σ où f atteint son minimum, alors x, y et z sont strictement positifs.

(3) Soit $p = (x,y,z)$ un point de Σ où f atteint son minimum. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer que $x = y = z$.

(4) Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\forall (x,y,z) \in \Sigma\ :\ (x+y)(y+z)(z+x) \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

(5) Soient $a, b, c > 0$. On pose $M = \sqrt{ab+bc+ca}$. Montrer que le point $(\frac{a}{M}, \frac{b}{M}, \frac{c}{M})$ appartient à Σ.

(6) Démontrer l'inégalité $(*)$.