Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe aucune mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ invariante par l'application $x \mapsto x+1$.

Exercice 2. (théorème de Markov-Kakutani)
Dans tout l'exercice, C est une partie convexe compacte (non vide) d'un evt localement convexe X. On se donne une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'applications affines continues, $A_i : C \to C$, et on suppose que $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$ pour tous $i, j \in I$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un point $p \in C$ qui est laissé fixe par toutes les applications A_i. Dans ce qui suit, on note $\mathrm{Fix}(A)$ l'ensemble des points fixes d'une application A.

(1) Montrer que $F_i = Fix(A_i)$ est compact convexe, pour tout $i \in I$.
(2) Soit $F \subset C$ un compact convexe non vide, et soit $A : F \to F$ affine continue.
  (a) On fixe un point $q \in F$, et pour $N \in \mathbb{N}$ on pose
$$x_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} A^n(q)\,.$$
  Vérifier que $x_N \in K$ pour tout N, et que $\langle x^*, A(x_N)\rangle - \langle x^*, x_N\rangle \to 0$ pour toute $x^* \in X^*$.
  (b) Montrer que $\mathrm{Fix}(A) \neq \emptyset$.
(3) Montrer que $\mathrm{Fix}(A_i)$ est stable par A_j, pour tous $i, j \in I$.
(4) Montrer que $\bigcap_{i\in J} \mathrm{Fix}(A_i) \neq \emptyset$ pour tout ensemble fini $J \subset I$, et conclure.
(5) *Application.* Soit K un espace compact métrisable, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications continues, $T_i : K \to K$, commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur K qui est invariante par toutes les applications T_i.

Exercice 3. Soit K un espace compact métrisable, et soit F un fermé de K. Montrer que l'ensemble $\{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \mathrm{supp}(\mu) \subset F\}$ est w^*- fermé dans $\mathcal{P}(K)$.

Exercice 4. Soit (μ_k) une suite de mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{T}$. Montrer que (μ_k) converge préfaiblement dans $M(\mathbb{T})$ si et seulement si elle est bornée et $(\widehat{\mu}_k(n))$ converge pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit K un espace compact métrisable. Montrer que les mesures de probabilité à support fini sont w^*- denses dans $\mathcal{P}(K)$.

Exercice 6. Soit Ω un espace polonais, et soit $\mathcal{P}(\Omega) \subset M(\Omega)$ le convexe constitué par les mesures de probabilité boréliennes sur Ω. Le but de l'exercice est de montrer que les points extrémaux de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les masses de Dirac δ_a, $a \in \Omega$.

(1) Montrer que toute masse de Dirac est dans $\mathrm{Ext}(\mathcal{P}(\Omega))$.
(2) Montrer que si $\mu \in \mathrm{Ext}(\mathcal{P}(\Omega))$, alors $\mu(A) = 0$ ou 1 pour tout borélien $A \subset \Omega$.
(3) Soit d une distance sur Ω compatible avec la topologie de Ω et soit $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que pour tout fermé $F \subset \Omega$ tel que $\mu(F) > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un fermé $F' \subset F$ tel que $\mathrm{diam}(F') < \varepsilon$ et $\mu(F') > 0$.
(4) Conclure.

Exercice 7. (Stone-Weierstrass)
Soit K un espace compact métrisable, et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$. On suppose que $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{\varphi \in \mathcal{A};\ \varphi \text{ réelle}\}$ sépare les points de K. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.

(1) Montrer que si $\mu \in \mathcal{A}^{\perp}$, alors $h\mu \in \mathcal{A}^{\perp}$ pour toute $h \in \mathcal{A}$.
(2) On pose $C = \{\mu \in \mathcal{A}^{\perp};\ \|\mu\| \leq 1\}$.
   (a) Montrer que si $C \neq \{0\}$, alors $\|\mu\| = 1$ pour toute $\mu \in \mathrm{Ext}(C)$.
   (b) Montrer que si $\mu \in \mathrm{Ext}(C)$ et si $\mu_1, \mu_2 \in C$ vérifient $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ et $\|\mu_1\| + \|\mu_2\| = \|\mu\|$, alors μ_1 et μ_2 sont proportionnelles à μ.
   (c) Montrer que si $\mu \in \mathrm{Ext}(C)$ et si $g \in \mathcal{A}$ vérifie $0 \leq g \leq \mathbf{1}$, alors $g\mu$ est proportionnelle à μ.
(3) Montrer que si $a, b \in K$ et $a \neq b$, alors on peut trouver $g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ telle que $0 \leq g \leq \mathbf{1}$ et $g(a) < g(b)$.
(4) Déduire de (2) et (3) que si $\mu \in \mathrm{Ext}(C)$, alors $\mathrm{supp}(|\mu|)$ contient au plus 1 point.
(5) Conclure.

Exercice 8. Soit K un espace compact métrisable sans points isolés. On munit $\mathcal{P}(K)$ de la topologie préfaible induite par $M(K) = \mathcal{C}(K)^*$, et on note $\mathcal{P}_c(K) \subset \mathcal{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité continues. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}_c(K)$ est un G_δ dense de $\mathcal{P}(K)$ (de sorte qu'en particulier $\mathcal{P}_c(K) \neq \emptyset$).

(1) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\mathcal{U}_\varepsilon = \{\mu \in \mathcal{P}(K);\ \forall x \in K\ :\ \mu(\{x\}) < \varepsilon\}$.

(a) Montrer que pour $a \in K$ et $\mu \in \mathcal{P}(K)$, on a $\mu(\{x\}) < \varepsilon$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert V de x et une fonction $f \in \mathcal{C}(K)$ positive tels que $f \geq 1$ sur V et $\int_K f\, d\mu < \varepsilon$.
(b) En déduire que l'ensemble $\{(\mu, x) \in \mathcal{P}(K) \times K;\ \mu(\{x\}) < \varepsilon\}$ est ouvert dans $\mathcal{P}(K) \times K$.
(c) Montrer que $\mathcal{U}_\varepsilon$ est un ouvert de $\mathcal{P}(K)$.

(2) Soit $a \in K$, et soit $\varepsilon > 0$.
(a) Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de δ_a dans $\mathcal{P}(K)$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert W de a vérifiant la propriété suivante : pour toute $\mu \in \mathcal{P}(K)$ telle que $\operatorname{supp}(\mu) \subset W$, on a $\mu \in \mathcal{W}$.
(b) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \ldots, a_N \in K$ deux à deux distincts. Montrer que si N est assez grand, alors $\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{a_j}$ appartient à $\mathcal{U}_\varepsilon$.
(c) Déduire de (a) et (b) que δ_a est dans l'adhérence de $\mathcal{U}_\varepsilon$.
(d) Observer que les $\mathcal{U}_\varepsilon$ sont convexes, puis montrer que $\mathcal{U}_\varepsilon$ est dense dans $\mathcal{P}(K)$, pour tout $\varepsilon > 0$.

(3) Conclure.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des mesures de probabilité (boréliennes) sur $\mathbb{T}$ qui sont continues mais pas de Rajchman.

(1) Soit $F \subset \mathbb{T}$ un ensemble fini. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (m_k) telle que (ξ^{m_k}) converge pour tout $\xi \in F$, et en déduire qu'il existe une suite d'entiers (n_k) tendant vers $+\infty$ telle que $\xi^{n_k} \to 1$ pour tout $\xi \in F$.
(2) Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{V}_N = \{\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{T});\ \exists n \geq N\ :\ |\widehat{\sigma}(n)| > 1/2\}$. Montrer que $\mathcal{V}_N$ est un ouvert de $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, et déduire de (1) que toute mesure $\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ à support fini appartient à $\mathcal{V}_N$.
(3) Démontrer le résultat souhaité en utilisant convenablement le théorème de Baire.

Exercice 10. Le but de l'exercice est de donner un exemple explicite d'une mesure de probabilité $\sigma \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ continue mais pas de Rajchman.

(1) On note S l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ s'écrivant sous la forme $n = \sum_{j\in J} \varepsilon_j 5^j$, où $I \subset \mathbb{N}^*$ est fini et $\varepsilon_j = \pm 1$ pour tout $j \in J$. Montrer qu'un entier $n \in S$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $n = \sum \varepsilon_j 5^j$.
(2) Pour $N \in \mathbb{N}$ on note P_N le polynôme trigonométrique défini par

$$P_N(e^{it}) = \prod_{j=1}^{N} (1 + \cos(5^j t))\,.$$

(a) Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Montrer que $\sigma_N = P_N m$ est une mesure de probabilité et déterminer ses coefficients de Fourier.

(b) Montrer que la suite (σ_N) converge préfaiblement dans $\mathcal{P}(\mathbb{T})$, et déterminer les coefficients de Fourier de $\sigma = \lim \sigma_N$.

(3) Montrer que si $n = \sum_{j\in J} \varepsilon_j 5^j \in S$ alors $n \geq 3^{\max J}$, puis montrer que $\mathrm{dens}(S) = 0$.

(4) Conclure.

Exercice 11. Soit σ une mesure de Rajchman positive sur $\mathbb{T}$. Montrer que toute mesure complexe absolument continue par rapport à σ est de Rajchman.

Exercice 12. ("spectral mixing theorem")
Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $V \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. On pose $\mathcal{E}_V = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{T}} \ker(V - \lambda Id)\right)$. Soit également $f \in H$. Le but de l'exercice est de prouver l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $f \perp \mathcal{E}_V$;

(ii) $\langle V^n f, f\rangle \xrightarrow{D} 0$;

(iii) $\langle V^n f, g\rangle \xrightarrow{D} 0$ pour tout $g \in H$.

(1) On note σ_f la mesure spectrale pour V associée à f. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{T}$, on a $\sigma_f(\{a\}) = \langle P_{\bar a} f, f\rangle$, où $P_{\bar a}$ est la projection orthogonale sur $\ker(V - \bar a Id)$.

(2) Montrer que (i) et (ii) sont équivalentes.

(3) Soit $G = \{g \in H;\ \langle V^n f, g\rangle \xrightarrow{D} 0\}$. Montrer que G est un sous-espace fermé de H, et que G contient $\mathrm{Vect}\,\{V^k f;\ k \in \mathbb{N}\}$ si (ii) est vérifiée.

(4) Conclure.

Exercice 13. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $V \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur *unitaire*. Pour $f \in H$, on note σ_f la mesure spectrale pour V associée à f.

(1) Soit $f \in H$. Montrer que pour tout polynôme trigonométrique P, on a
$$\|P(V)f\|^2 = \|P\|^2_{L_2(\sigma_f)}\,.$$

(2) Soit $f \in H$. On note H_f le sous-espace fermé de H engendré par les $V^n f$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $M : L_2(\sigma_f) \to L_2(\sigma_f)$ l'opérateur de multiplication par la fonction $\xi \mapsto \xi$. Montrer que $V_{|H_f}$ est unitairement équivalent à M. Plus précisément, montrer qu'il existe un unique opérateur unitaire $J : H_f \to L_2(\sigma_f)$ tel que $J(f) = \mathbf{1}$ et $V_{|H_f} = J^{-1} M J$.

(3) Soit $f \in H$. Déduire de (2) que si $x \in H_f$, alors $\sigma_x << \sigma_f$.

(4) Montrer que la réciproque de (3) est fausse en général.

Exercice 14. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction. Le but de l'exercice est de montrer que T possède des "mesures spectrales"; autrement dit, que pour tout $x \in H$, il existe une mesure positive $\sigma_x \in M(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par $\widehat{\sigma_x}(n) = \langle T_n x, x\rangle$, où $T_n = T^n$ pour $n \geq 0$ et $T_n = T^{*|n|}$ pour $n < 0$.

(1) On suppose qu'on a $\|T\| < 1$.
  (a) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{T}$, l'opérateur $P_\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi^n T_n$ est bien défini.
  (b) Établir l'identité
$$P_\xi = (Id - (\xi T)^*)^{-1}(Id - T^*T)\,(Id - \xi T)^{-1}\,,$$
  et en déduire qu'on a $\langle P_\xi x, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.
  (c) Montrer que si $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de scalaires à support fini et si $x \in H$, alors
$$\sum_{i,j} a_i \overline{a_j} \langle T_{i-j} x, x\rangle = \int_{\mathbb{T}} \Big| \sum_k a_k \xi^k \Big|^2 \langle P_\xi x, x\rangle \, dm(\xi)\,,$$
  où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 15. Soit H un espace de Hilbert complexe.

(1) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ une contraction. Montrer qu'on a $\|x - S^*Sx\|^2 \leq \|x\|^2 - \|Sx\|^2$ pour tout $x \in H$, et en déduire que
$$\forall x, y \in H \ : \ |\langle x, y\rangle - \langle Sx, Sy\rangle| \leq \sqrt{\|x\|^2 - \|Sx\|^2}\ \|y\|\,.$$
(2) Montrer à l'aide de (1) que si $V \in \mathcal{L}(H)$ est une contraction, alors
$$\forall f \in H \ : \ \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq 0} |\langle V^n f, f\rangle - \langle V^{n+k} f, V^k f\rangle| = 0\,.$$
(3) Montrer que le "spectral mixing theorem" (exercice 12) est valable pour toute contraction $V \in \mathcal{L}(H)$.

Exercice 16. (inégalité de von Neumann)
Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout polynôme P et pour tout $x \in H$, on a
$$\text{(vN)} \qquad \|P(T)x\|^2 \leq \|P\|^2_{L_2(\sigma_x)}\,,$$
où σ_x est la mesure spectrale pour T associée à x (voir l'exercice 14).

(1) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit P un polynôme de degré $k+1$, $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k+1} t^{k+1}$. On pose $Q(t) = P(t) - a_0$ et $u(t) = \frac{Q(t)}{t}\cdot$ Soit également $x \in H$.
  (a) Montrer qu'on a $\|Q(T)x\| \leq \|u(T)x\|$.

(b) Exprimer $\langle Q(T)x, x\rangle$ à l'aide de σ_x.

(2) Démontrer (vN) par récurrence sur le degré de P.

(3) Déduire de (vN) que pour tout polynôme P, on a

$$\|P(T)\| \leq \sup\{|P(\xi)|;\ |\xi| = 1\}\,.$$

Exercice 17. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit également K un compact de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\|P(T)\| \leq C\, \sup\{|P(\xi)|;\ \xi \in K\}$$

pour tout polynôme P. En utilisant convenablement le théorème de Hahn-Banach, montrer que pour tout $(x, x^*) \in X \times X^*$, il existe une mesure $\lambda = \lambda_{x,x^*} \in M(K)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \langle x^*, T^n x\rangle = \int_K \xi^n\, d\lambda(\xi)\,.$$

Exercice 18. (théorème de Blum-Hanson)

Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction. Soit également $x \in H$. On suppose qu'on a $\lim_{n\to\infty} \langle T^n x, x\rangle = 0$. En utilisant l'inégalité de von Neumann (exercice 16), montrer que pour toute suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$, on a

$$\lim_{K\to\infty} \left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\| = 0\,.$$