Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T : \Omega \to \Omega$ vérifiant $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est ergodique par rapport μ;

(ii) pour tous $A, B \in \mathfrak{A}$ tels que $\mu(A)\mu(B) > 0$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(A) \cap B \neq \emptyset$;

(iii) pour tout $A \in \mathfrak{A}$ tel que $T(A) \subset A$, on a $\mu(A) = 0$ ou 1.

Exercice 2. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathfrak{A}$, et soit $T : \Omega \to \Omega$ mesurable. On suppose qu'il existe exactement une mesure de probabilité μ sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Montrer que T est ergodique par rapport à μ.

Exercice 3. (formule de Kac)
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T : \Omega \to \Omega$ ergodique par rapport à μ. On suppose de plus que T est bijective et que $T^{-1} : \Omega \to \Omega$ est mesurable. On fixe $A \in \mathfrak{A}$ avec $\mu(A) > 0$ et on définit $r_A : \Omega \to [1, \infty]$ par

$$r_A(x) = \min\{n \geq 1;\ T^n(x) \in A\}\,,$$

avec la convention $\min \emptyset = \infty$.

(1) Montrer que r_A est mesurable et qu'on a $r_A(x) < \infty$ presque partout.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \{x \in A;\ r_A(x) = n\}$. On pose égalemant $A_\infty = \{x \in \Omega;\ r_A(x) = \infty\}$.

(a) Montrer que les ensembles $A_n, T(A_n), \ldots; T^{n-1}(A_n)$ sont deux à deux disjoints, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n \cup T(A_n) \cup \cdots \cup T^{n-1}(A_n)$. Montrer qu'on a $T^k(A) \subset A_\infty \cup \bigcup_1^\infty B_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire pour $\mu(\bigcup_1^\infty B_n)$?

(c) Montrer que les B_n sont deux à deux disjoints.

(3) Établir la formule

$$\int_A r_A \, d\mu = 1\,.$$

Exercice 4. (lemme de Rokhlin-Kakutani)
Soit $T : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ergodique et bijective (avec T^{-1} mesurable). On suppose que la mesure de probabilité μ est *non-atomique*, ce qui signifie que pour tout $\alpha \in]0,1[$, on peut trouver $A \in \mathfrak{A}$ tel que $0 < \mu(A) < \alpha$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $E \in \mathfrak{A}$ tel que les ensembles $E, T(E), \dots, T^{K-1}(E)$ sont deux à deux disjoints et $\mu(E \cup T(E) \cup \cdots \cup T^{K-1}(E)) > 1 - \varepsilon$.*

(1) Soit $K \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathfrak{A}$ vérifiant $\mu(A) > 0$. Avec les notations de l'exercice 3, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E_n = \bigcup_{0 \le j < \left[\frac{n}{K}\right]} T^{jK}(A_n)\,.$$

(a) Montrer que les ensembles $E_n, T(E_n), \dots, T^{K-1}(E_n)$ sont deux à deux disjoints et contenus dans B_n.
(b) Montrer que $\mu\left(B_n \setminus \bigcup_{i=0}^{K-1} T^i(E_n)\right) \le K\,\mu(A_n)\,.$

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 5. Soit $d \ge 1$ et soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ une matrice $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ l'endomorphisme de $\mathbb{T}^d$ défini par

$$T(\xi_1, \dots, \xi_d) = (\xi_1^{a_{11}} \cdots \xi_d^{a_{1d}}, \dots, \xi_1^{a_{d1}} \cdots \xi_d^{a_{dd}})\,.$$

(1) On note $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ la "surjection canonique", définie par $\pi(x_1, \dots, x_d) = (e^{2i\pi x_1}, \dots, e^{2i\pi x_d})$. Quelle relation y a-t-il entre A, T et π?
(2) Montrer que T est surjectif si et seulement si $\det A \neq 0$. *Dans la suite, on suppose que T est surjectif.*
(3) On note m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^d$. On rappelle que m est l'unique mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{T}^d$ invariante par les rotations de $\mathbb{T}^d$. Montrer que T préserve la mesure m.
(4) Pour $\gamma = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note $e_\gamma : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$ le "caractère" défini par

$$e_\gamma(\xi_1, \dots, \xi_d) = \xi_1^{n_1} \cdots \xi_d^{n_d}\,.$$

(a) Vérifier qu'on a $e_\gamma \circ T = e_{A^*\gamma}$, où A^* est la matrice transposée de A.
(b) Montrer que si $e_\gamma \circ T^n = e_\gamma$ pour un certain entier $n \ge 1$, alors la fonction $f = e_\gamma + e_\gamma \circ T + \cdots e_\gamma \circ T^{n-1}$ est T-invariante.

(5) Montrer que T est ergodique par rapport à m si et seulement si $e_\gamma \circ T^n \neq e_\gamma$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et pour tout $n \ge 1$.
(6) Montrer que T est ergodique si et seulement si aucune valeur propre complexe de A n'est racine de l'unité.
(7) On suppose que T est ergodique.

(a) Montrer que si $\gamma, \gamma' \in \mathbb{Z}^d$, alors $e_\gamma \circ T^n = e_{\gamma'}$ pour au plus 1 entier $n \in \mathbb{N}$, sauf si $\gamma = 0 = \gamma'$.
(b) En déduire que $\langle e_\gamma \circ T^n, e_{\gamma'} \rangle_{L_2(m)}$ tend vers $\langle e_\gamma, \mathbf{1} \rangle_{L_2} \langle \mathbf{1}, e_{\gamma'} \rangle_{L_2}$ quand $n \to \infty$, pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathbb{Z}^d$.
(c) Montrer que T est en fait mélangeante par rapport à m.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $T : \Omega \to \Omega$ telle que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Le but de l'exercice est de montrer que T est mélangeante par rapport à μ si et seulement si $\mu(T^{-n}(A) \cap A) \to \mu(A)^2$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$.

(1) Soit H un espace de Hilbert, et soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée d'éléments de H. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, f_k \rangle = 0$. Montrer que (f_n) tend faiblement vers 0 dans H, i.e. $\langle f_n, g \rangle \to 0$ pour tout $g \in H$.
(2) Soit $A \in \mathfrak{A}$. En considérant $f_n = (\mathbf{1}_A - \mu(A)\mathbf{1}) \circ T^n \in L_2(\Omega, \mu)$, montrer que si $\mu(T^{-n}(A) \cap A) \to \mu(A)^2$, alors $\mu(T^{-n}(A) \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$.
(3) Conclure.

Exercice 7. Montrer que si Ω est un espace topologique métrisable séparable, alors la tribu borélienne de $\Omega \times \Omega$ est égale à la tribu produit $\mathfrak{B}(\Omega) \otimes \mathfrak{B}(\Omega)$.

Exercice 8. Montrer que si $T : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est faiblement mélangeante, alors $T \times S$ est ergodique pour toute $S : (\Omega', \mathfrak{A}', \mu') \to (\Omega', \mathfrak{A}', \mu')$ ergodique.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $T : \Omega \to \Omega$ telle que $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Montrer que T est faiblement mélangeante par rapport à μ si et seulement si la propriété suivante a lieu : pour tous $A, B, C \in \mathfrak{A}$ vérifiant $\mu(A)\mu(B)\mu(C) > 0$, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ et $\mu(T^{-n}(A) \cap C) > 0$.

Exercice 10. Soit $g \in \mathbb{T}$ et soit $R_g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la rotation associée.

(1) Montrer que R_g n'est pas faiblement mélangeante par rapport à la mesure de Lebesgue m.
(2) Montrer que $T = R_g \times R_g$ possède cependant la propriété suivante : pour tout "rectangle mesurable" $A = A_1 \times A_2 \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ tel que $T^{-1}(A) = A$, on a $(m \otimes m)(A) = 0$ ou 1.