M2 2012-2013

Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Montrer que le théorème de récurrence de Poincaré n'est pas vrai pour l'espace mesuré $(\mathbb{R}, m)$, où m est la mesure de Lebesgue.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $T(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $T(0) = 0$. Montrer que T préserve la mesure borélienne μ définie par $d\mu(x) = \frac{dx}{1+x^2}\cdot$

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ finie, et soit $T : \Omega \to \Omega$ mesurable. Montrer que T préserve la mesure μ si et seulement si on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{E}$, où $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}$ est stable par intersections finies et engendre la tribu $\mathfrak{A}$.

Exercice 4. Soit $T : [0,1] \to [0,1]$ la *transformation de Gauss*, définie par $T(0) = 0$ et $T(x) = 1/x - [1/x]$ pour $x > 0$.

(1) Montrer que T préserve la mesure borélienne μ définie par $d\mu(x) = \frac{dx}{1+x}\cdot$

(2) Montrer que si $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ se développe en fraction continue sous la forme $x = [a_1, a_2, a_3, \dots]$, alors $T(x) = [a_2, a_3, \dots]$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que si $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, alors $|f\mu| = |f|\,\mu$.

Exercice 6. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathfrak{A}$, et soit λ une mesure complexe sur $(\Omega, \mathfrak{A})$. Montrer que λ est positive si et seulement si $\lambda(\Omega) = |\lambda|(\Omega)$.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit λ une mesure complexe absolument continue par rapport à μ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathfrak{A} \,:\, (\mu(A) < \delta) \implies (|\lambda(A)| < \varepsilon)\,.$$

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $(A_1, \dots, A_N)$ une partition finie de Ω, avec $A_i \in \mathfrak{A}$ et $\mu(A_i) > 0$ pour tout i. On note $\widetilde{\mathfrak{A}}$ la sous-tribu de $\mathfrak{A}$ engendrée par $A_1, \dots, A_N$.

(1) Décrire les éléments de $\widetilde{\mathfrak{A}}$.
(2) Identifier $\mathbb{E}(f \,|\, \widetilde{\mathfrak{A}})$, pour toute $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathfrak{A}$. On suppose que la tribu engendrée par $\bigcup_n \mathfrak{A}_n$ est égale à $\mathfrak{A}$.

(1) Montrer que $\mathcal{E} = \bigcup_n L_1(\Omega, \mathfrak{A}_n, \mu)$ est dense dans $L_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
(2) Montrer que $\mathbb{E}(f \,|\, \mathfrak{A}_n)$ tend vers f en norme L_1, pour toute $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Exercice 10. Soit Ω un ensemble fini, et soit $\sigma : \Omega \to \Omega$ une permutation de Ω. Pour tout $x \in \Omega$, on pose $O(x, \sigma) = \{\sigma^n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ et on note $n_\sigma(x)$ le nombre déléments de $O(x, \sigma)$. Montrer que pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\sigma^n(x)) = \frac{1}{n_\sigma(x)} \sum_{j=0}^{n_\sigma(x)-1} f(\sigma^j(x)).$$

Exercice 11. Soit H un espace de Hilbert et soit $V \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|V\| \leq 1$. On note p_V la projection orthogonale sur $\ker(V - Id)$. Montrer que pour tout $x \in H$ et pour toute suite d'intervalles $I_k \subset \mathbb{N}$ telle que $|I_k| \to \infty$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|I_k|} \sum_{n\in I_k} V^n x = p_V(x)\,.$$

Exercice 12. (théorème de dérivation de Lebesgue)
Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et si on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors F est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$ et $F' = f$ presque partout.* Dans la suite, on notera m la mesure de Lebesgue.

(1) Que peut-on dire pour une fonction f continue?
(2) Montrer qu'il suffit d'établir le résultat pour une fonction f *intégrable* sur $\mathbb{R}$.
(3) Pour toute fonction $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, on définit la "fonction maximale" $M_\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ par

$$M_\varphi(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(I)} \int_I |\varphi(t)|\, dt \right\},$$

où la borne supérieure est prise sur tous les intervalles bornés non triviaux I contenant x. D'autre part, pour $f \in L_1(\mathbb{R})$ on définit $E_f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ par

$$E_f(x) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| .$$

(a) Montrer que si $f \in L_1(\mathbb{R})$ et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue à support compact, alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ E_f(x) \le |f(x) - g(x)| + M_{f-g}(x) \ .$$

(b) En déduire que pour f et g comme dans (a), on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ m(\{E_f > \varepsilon\}) \le \frac{2}{\varepsilon} \, \|f - g\|_{L_1} + m\left(\{M_{f-g} > \varepsilon/2\}\right).$$

(4) Le but de cette question est d'établir le résultat suivant (inégalité maximale de Hardy-Littlewood) : *pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante C_α telle que*

$$\forall \varphi \in L_1(\mathbb{R}) \ : \ m(\{M_\varphi > \alpha\}) \le C_\alpha \, ||\varphi||_1 \ .$$

(a) Pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$, on note $3I$ l'intervalle de même centre et de longueur triple.
  (i) Montrer que si I, J sont deux intervalles bornés d'intersection non-vide et si $m(J) \ge m(I)$, alors $I \subset 3J$.
  (ii) En déduire que si $\mathcal{I}$ est une famille finie d'intervalles bornés, alors on peut trouver une sous-famille $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ formée d'intervalles deux à deux disjoints et telle que $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I \subseteq \bigcup_{J \in \mathcal{J}} 3J$.

(b) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $\alpha > 0$. Montrer que si $J_1, \dots, J_N$ sont des intervalles bornés deux à deux disjoints tels que $\int_{J_k} |\varphi(t)|\, dt > \alpha m(J_k)$ pour tout k, alors $m(\cup_1^N J_k)) < \frac{1}{\alpha} \, ||\varphi||_1$.

(c) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout compact $K \subseteq \{M_\varphi > \alpha\}$, on peut trouver des intervalles ouverts bornés $I_1, \dots, I_n$ tels que $K \subset \bigcup_1^n I_k$ et $\int_{I_k} |\varphi(t)|\, dt > \alpha m(I_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

(d) Démontrer l'inégalité souhaitée.

(5) Conclure.

Exercice 13. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs complexes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'on a $\mathbb{E}\xi_k = 0$ pour tout k et $\sum_0^\infty \mathbb{E}|\xi_k|^2 < \infty$.

(1) Montrer que la série $\sum \xi_k$ converge dans $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

(2) Soient $K, N \in \mathbb{N}$ avec $K \leq N$, et soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta_n = \xi_K + \cdots + \xi_n$ pour tout $n \in \{K, \ldots, N\}$, et

$$A = \left\{ \max_{K \leq n \leq N} |\eta_n| > \varepsilon \right\}.$$

Pour $\omega \in A$, on note $n(\omega)$ le plus petit $n \in \{K, \ldots, N\}$ tel que $|\eta_n(\omega)| > \varepsilon$, et pour $n \in \{K, \ldots, N\}$ on pose $A_n = \{\omega \in A;\ n(\omega) = n\}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \{K, \ldots, N\}$, les variables aléatoires $\mathbf{1}_{A_n}\eta_n$ et $\eta_N - \eta_n$ sont indépendantes, et en déduire que $\mathbf{1}_{A_n}\eta_n$ et $\mathbf{1}_{A_n}(\eta_N - \eta_n)$ sont orthogonales dans $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

(b) Déduire de (a) que $\int_{A_n} |\eta_N|^2 d\mathbb{P} \geq \int_{A_n} |\eta_n|^2 d\mathbb{P}$ pour tout $n \in \{K, \ldots, N\}$.

(c) Montrer que $\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \|\eta_N\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_K^N \mathbb{E}|\xi_k|^2$.

(3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq K} |\xi_K + \cdots + \xi_n| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k \geq K} \mathbb{E}|\xi_k|^2 .$$

(4) Montrer que la série $\sum \xi_k$ converge presque surement.