Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Soient $B_{\mathbf{w}}$ et $B_{\mathbf{w}'}$ deux shifts à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur $T = B_{\mathbf{w}} \oplus B_{\mathbf{w}'}$ soit hypercyclique.

Exercice 2. Soit X un evt, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T est hypercyclique et que $T \oplus T$ est *cyclique*.

(1) Montrer que si U_1, V_1, U_2, V_2 sont des ouverts non vides de X, alors on peut trouver un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que $AT = TA$ et $A(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2$.

(2) Montrer que T est faiblement mélangeant.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $T \oplus T^*$ n'est pas cyclique sur $H \oplus H$.

Exercice 4. Soit $V : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ l'opérateur défini par $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(1) Justifier que V est bien un opérateur continu sur $L_2([0,1])$.

(2) Identifier l'opérateur V^*, puis vérifier qu'on a $V^*J = JV$, où $J : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ est l'opérateur défini par $Jf(x) = f(1-x)$.

(3) En utilisant l'exercice 3, montrer que $V \oplus V$ n'est pas cyclique.

Exercice 5. Soit X un evt polonais, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Un vecteur $x \in X$ est dit *algébrique* pour T s'il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(T)x = 0$. Montrer que si T est hypercyclique et si l'ensemble des vecteurs algébriques pour T est dense dans X, alors T vérifie le critère d'hypercyclicité.

Exercice 6. Soit X un espace topologique et soit $T : X \to X$ une application continue. Pour $x \in X$ et $V \subset X$ ouvert $\neq \emptyset$, on pose

$$\mathcal{N}_T(x, V) = \{n \geq 1;\ T^n(x) \in V\}.$$

(1) Montrer que si $x \in \mathrm{Trans}(T)$, alors
$$\forall U, V \ : \ \mathcal{N}_T(U,V) = \mathcal{N}_T(x,V) - \mathcal{N}_T(x,U)\,.$$
(2) Montrer que si T est transitif, alors
$$\forall U, V \ : \ \mathcal{N}_T(U,V) - \mathcal{N}_T(U,V) = \mathcal{N}_T(V,V) - \mathcal{N}_T(U,U)\,.$$

Exercice 7. Soit X un espace polonais et soit $T : X \to X$ une application continue.

(1) Soient U, V des ouverts non vides de X, et soit $L \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe des ouverts non vides $U_1, U_2 \subset U$ et des entiers k, k' tels que $T^k(U_1) \subset V$, $T^{k+L}(U_2) \subset V$, $T^{k'}(U_1) \cap U_1 \neq \emptyset$ et $T^{k'+1}(U_2) \cap U_2 \neq \emptyset$. Montrer que $L + 1 \in \mathcal{N}_T(U,V) - \mathcal{N}_T(U,V)$.
(2) On suppose que tout ensemble $\mathcal{N}_T(U,V)$ contient deux entiers consécutifs. Montrer que T est faiblement mélangeante.

Exercice 8. Soit X un espace topologique et soit $T : X \to X$ topologiquement mélangeante. Montrer que pour toute application $S : Y \to Y$ topologiquement transitive, $T \times S$ est topologiquement transitive.

Exercice 9. Soit X un espace topologique. Étant donné un ensemble infini $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}^*$, on dit qu'une application continue $T : X \to X$ est $\mathcal{N}$-*mélangeante* si tout ensemble $\mathcal{N}_T(U,V)$ contient une partie cofinie de $\mathcal{N}$. Montrer qu'une application continue $T : X \to X$ est faiblement mélangeante si et seulement si elle est $\mathcal{N}$-mélangeante pour un certain $\mathcal{N}$.

Exercice 10. Le but de l'exercice est de montrer que tout opérateur hypercyclique sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est faiblement mélangeant.

(1) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_q = \mathrm{vect}\,(e_0, \dots, e_{q-1})$ et $F_q = \overline{\mathrm{vect}}\,\{e_j;\ j \geq q\}$, où $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la "base canonique" de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Enfin, on note $\pi_q : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to E_q$ la projection associée à la décomposition $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = E_q \oplus F_q$. Montrer que si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ est à image dense et vérifie $\pi_q A_{|E_q} = 0$, alors A satisfait à la propriété suivante : pour tous $a, b \in E_q$, on peut trouver $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\pi_q(u) = a$ et $\pi_q A(u) = b$.
(2) Montrer que pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un polynôme $P \neq 0$ tel que $\pi_q P(T)_{|E_q} = 0$.
(3) Déduire de (1) et (2) que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ est hypercyclique alors $T \oplus T$ est cyclique, et conclure.

Exercice 11. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace probabilisé, et soit $T : \Omega \to \Omega$ vérifiant $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Soit également $A \in \mathfrak{A}$ avec $\mu(A) > 0$. On pose

$$\mathcal{N} = \{n \geq 1;\ \mu(A \cap T^{-n}(A)) > 0\}.$$

(1) Justifier l'existence d'un entier $L \geq 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{L} T^{-j}(A)\right) + \mu(A) > \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}(A)\right),$$

et en déduire qu'on a $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}' \neq \emptyset$ pour tout ensemble épais $\mathcal{N}' \subset \mathbb{N}^*$.

(2) Montrer qu'on a aussi $\mathcal{N} \cap (S - S) \neq \emptyset$ pour tout ensemble infini $S \subset \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer qu'en fait (1) est un cas particulier de (2).

Exercice 12. Soit X un evt Polonais et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T est hypercyclique et qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur X telle que $\mu \circ T^{-1} = \mu$ et $\mu(O) > 0$ pour tout ouvert $O \neq \emptyset$.

(1) Montrer que si W et V sont deux ouverts non vides de X, alors on peut trouver un ouvert non vide $A \subset X$ et un entier m tels que $m + \mathcal{N}_T(A, A) \subset \mathcal{N}_T(W, V)$.

(2) Montrer que si $U \subset X$ est un ouvert non vide et si W est un voisinage de 0, alors $\mathcal{N}_T(U, W)$ est épais.

(3) En utilisant l'exercice 11, montrer que T vérifie le critère d'hypercyclicité.