Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n° *3*

Exercice 1. Soit $B_{\mathbf{w}}$ un shift à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$. Déterminer l'adjoint de $B_{\mathbf{w}}$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est **hyponormal** si on a $\|T^*u\| \leq \|Tu\|$ pour tout $u \in H$.

(1) Vérifier que tout opérateur normal est hyponormal, et que le shift à droite sur $\ell_2(\mathbb{N})$ est hyponormal mais pas normal.
(2) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est hyponormal, alors $\|T^n x\|^2 \leq \|T^{n-1}x\|\,\|T^{n+1}x\|$ pour tout $x \in H$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Un opérateur hyponormal peut-il être hypercyclique?

Exercice 3. (théorème de Beurling)

Dans cet exercice, on note $\mathbf{z}$ la fonction $\mathbb{T} \ni \xi \longmapsto \xi$, et S l'opérateur sur $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ défini par $Sf = \mathbf{z}f$. Le but de l'exercice est de de déterminer tous les sous-espaces fermés $\mathcal{M} \subset H^2$ invariants par S, c'est-à-dire vérifiant $\mathbf{z}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

(1) Une fonction $\varphi \in H^2(\mathbb{T})$ est dit **intérieure** si elle vérifie $|\varphi(\xi)| = 1$ presque partout. Montrer que si φ est intérieure, alors $\mathcal{M} = \varphi H^2$ est un sous-espace fermé de H^2 invariant par S.
(2) Montrer qu'on a $\bigcap_{n\geq 0} \mathbf{z}^n H^2 = \{0\}$.
(3) Soit $\mathcal{M} \subset H^2$ un sous-espace fermé invariant par S non réduit à $\{0\}$.
   (a) On pose $\mathcal{L} = \mathcal{M} \ominus \mathbf{z}\mathcal{M} := \mathcal{M} \cap (\mathbf{z}\mathcal{M})^{\perp}$. En utilisant (2), montrer que $\mathcal{L}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
   (b) Montrer que si $\varphi_1 \in \mathcal{L}$ et $\varphi_2 \in \mathcal{M}$, alors la fonction $u = \varphi_1\overline{\varphi_2}$ vérifie $\widehat{u}(n) = 0$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, alors $\varphi_1\overline{\varphi_2}$ est constante.
   (c) Montrer que l'espace $\mathcal{L}$ est de dimension 1.
   (d) Soit $\varphi \in \mathcal{L}$, $\varphi \neq 0$. Montrer par récurrence que si une fonction $f \in \mathcal{M}$ est orthogonale à φH^2, alors f appartient à $\mathbf{z}^n\mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Montrer que tout sous-espace fermé $\mathcal{M} \subset H^2$ invariant par S et non réduit à $\{0\}$ est de la forme φH^2, pour une certaine fonction intérieure φ.

Exercice 4. (espace de Bergman)

On note $B^2(\mathbb{D})$ l'espace de toutes les fonctions f holomorphes sur le disque unité et vérifiant $\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,d\lambda(z) < \infty$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. On munit $B^2(\mathbb{D})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,d\lambda(z)\,.$$

(1) Montrer qu'une fonction $f \in H(\mathbb{D})$, s'écrivant $f(z) = \sum_0^\infty a_n(f)z^n$, appartient à $B^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $\sum_0^\infty \frac{|a_n(f)|^2}{n+1} < \infty$, et qu'on a alors

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{n+1}\,.$$

(2) En déduire que $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, et que si on pose $e_n(z) = \sqrt{n+1}\,z^n$, alors la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.
(3) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{D}$, il existe une unique fonction $k_s \in B^2(\mathbb{D})$ telle que $\forall f \in B^2(\mathbb{D})\ :\ f(s) = \langle f, k_s\rangle$.
(4) Déterminer explicitement le noyau reproduisant k_s pour $s \in \mathbb{D}$.

Exercice 5. Soit $B^2(\mathbb{D})$ l'espace de Bergman.

(1) Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$, alors la formule $Bf(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ a un sens pour tout $z \in \mathbb{D}$ et définit une fonction $Bf \in B^2(\mathbb{D})$.
(2) Montrer que l'opérateur $B : B^2(\mathbb{D}) \to B^2(\mathbb{D})$ est hypercyclique.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert constitué de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que pour tout point $s \in \Omega$, la forme linéaire $\delta_s : H \to \mathbb{C}$ définie par $\delta_s(f) = f(s)$ est non nulle et continue sur H. On note $\mathrm{Mult}(H)$ l'ensemble des fonctions $\phi = \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\phi f \in H$ pour toute $f \in H$.

(1) Montrer que $\mathrm{Mult}(H) \subset H(\Omega)$.
(2) Montrer que si $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$, alors on définit un opérateur continu sur H en posant $M_\phi f = \phi f$.
(3) Montrer qu'aucun opérateur M_ϕ n'est hypercyclique.
(4) Pour $s \in H$, on note k_s le noyau reproduisant pour H au point s. Montrer qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est de la forme M_ϕ^* pour une certaine $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$ si et seulement si tous les k_s sont des vecteurs propres de T.
(5) Soit $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$. Donner une condition suffisante simple pour que M_ϕ^* soit hypercyclique.
(6) On suppose que $H^\infty(\Omega) \subset \mathrm{Mult}(H)$. Montrer que si $\phi \in \mathrm{Mult}(H)$ et si M_ϕ^* est hypercyclique, alors $\overline{\phi(\Omega)} \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.
(7) On suppose que $H^\infty(\Omega) \subset \mathrm{Mult}(H)$. Trouver une condition simple permettant d'affirmer que pour $\phi \in H^\infty(\Omega)$, l'hypercyclicité de M_ϕ^* entraine que $\phi(\Omega) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Exercice 7. Soit X un evt. Montrer qu'il n'existe pas d'opérateur hypercyclique $T \in \mathcal{L}(X)$ de la forme $T = \lambda Id + K$, où K est un opérateur de rang fini.

Exercice 8. Soit X un evt, et soit $K \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'il existe une suite $(e_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ et un entier $m \geq 1$ tels que

(i) $Ke_j = 0$ si $0 \leq j < m$;
(ii) pour $j \geq m$, Ke_j est de la forme $Ke_j = \lambda e_{j-m} + f$, où $\lambda \neq 0$ et $f \in \mathrm{Vect}\,\{e_i;\ 0 \leq i < j-m\}$;
(iii) $\mathrm{Vect}\,\{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X.

Montrer que $T = Id + K$ est topologiquement mélangeant.

Exercice 9. Soit $B_{\mathbf{w}}$ un shift à poids sur $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell_p(\mathbb{N})$. Soit également ϕ une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0, \|\mathbf{w}\|_\infty)$.

(1) Pourquoi l'opérateur $\phi(B_{\mathbf{w}})$ est-il bien défini?
(2) On suppose que ϕ est non constante et $\phi(0) = 1$. Montrer que $\phi(B_{\mathbf{w}})$ est topologiquement mélangeant.
(3) On suppose que la suite de poids $\mathbf{w}$ vérifie $\inf_{n\geq 1} |w_n| = \alpha > 0$. Montrer que si ϕ est non constante et si $\phi(D(0,\alpha)) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, alors $\phi(B_{\mathbf{w}})$ vérifie le critère de Godefroy-Shapiro.
(4) Dans cette question, on prend $X = \ell_2(\mathbb{N})$ et $B_{\mathbf{w}} = B$ (le shift "sans poids" sur $\ell_2(\mathbb{N})$). À quel opérateur naturel correspond $\phi(B)$ si on identifie $\ell_2(\mathbb{N})$ à $H^2(\mathbb{D})$?

Exercice 10. Soit $B_{\mathbf{w}}$ un shift à poids sur $X = \ell_p(\mathbb{N})$ ou $c_0(\mathbb{N})$, associé à la suite de poids $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$. On suppose que $|w_n|$ admet une limite quand $n \to \infty$. Déterminer le spectre de $B_{\mathbf{w}}$.

Exercice 11. Soit $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Déterminer le spectre de l'opérateur de multiplication $M_\phi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$.

Exercice 12. Soit T un opérateur sur $\ell_2(\mathbb{N})$. On suppose que la matrice de T dans la "base canonique" de $\ell_2(\mathbb{N})$ est triangulaire inférieure. Montrer que T n'est pas hypercyclique.

Exercice 13. Soit X un evt et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur hypercyclique.

(1) Soit x un vecteur hypercyclique pour T. On pose $F_0 = HC(T) \cap \overline{\{T^{2n}x;\ n \geq 1\}}$ et $F_1 = HC(T) \cap \overline{\{T^{2n+1}x;\ n \geq 1\}}$. En utilisant la connexité de $HC(T)$, montrer que $F_0 \cap F_1 \neq \emptyset$.
(2) Montrer que l'opérateur $S = T^2$ est hypercyclique.

Exercice 14. (opérateurs chaotiques)
Soit X un evt complexe. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, on note $\mathrm{Per}(T)$ l'ensemble des points périodiques de T, i.e. $\mathrm{Per}(T) = \{x \in X;\ \exists N \geq 1\ :\ T^N x = x\}$. L'opérateur T est dit **chaotique** s'il est hypercyclique et si $\mathrm{Per}(T)$ est dense dans X.

(1) Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}(X)$, on a
$$\mathrm{Per}(T) = \mathrm{Vect}\left[\bigcup_{\lambda \in e^{2i\pi\mathbb{Q}}} \ker(T - \lambda Id)\right].$$
(2) Montrer que les opérateurs (non scalaires) commutant avec la dérivation sur $H(\mathbb{C})$ sont chaotiques, de même que les adjoints de multiplicateurs hypercycliques sur $H^2(\mathbb{D})$.
(3) On suppose que X est un espace de Banach et que $T \in \mathcal{L}(X)$ est chaotique. Montrer que si X admet une décomposition de la forme $X = X_1 \oplus X_2$, où les X_i sont des sous-espaces fermés invariants par T, alors les restrictions de T à X_1 et X_2 sont chaotiques.
(4) Montrer que si X est un espace de Banach et si $T \in \mathcal{L}(X)$ est chaotique, alors $\sigma(T)$ n'a pas de points isolés.
(5) Déduire de (4) qu'il existe des espaces de Banach séparables de dimension infinie sur lesquels aucun opérateur n'est chaotique.
(6) Dans cette question, on prend $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ et $T = B_{\mathbf{w}}$ pour une certaine suite de poids $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  (i) $B_{\mathbf{w}}$ est chaotique;
  (ii) $B_{\mathbf{w}}$ possède au moins une valeur propre de module 1;
  (iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|w_1 \cdots w_n|^p} < \infty$.

Exercice 15. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ une isométrie. On suppose qu'on a $\sigma(T) = \{1\}$. Le but de l'exercice est de montrer que $T = Id$.

(1) On rappelle que la fonction arcsinus se développe en série entière dans l'intervalle $]-1,1[$ sous la forme $\arcsin(x) = \sum_0^\infty c_k x^k$, avec des coefficients c_k *positifs*.
  (a) Montrer qu'on a $\sum_0^\infty c_k = \frac{\pi}{2}$.
  (b) Pour tout opérateur $L \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant $\sigma(L) = \{0\}$, justifier l'identité $\sum_0^\infty c_k \sin(L)^k = L$.
(2) On note log la détermination principale du logarithme et on pose $L = i\log(T)$.
  (a) Justifier cette définition.
  (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\sin(nL)^k\| \leq 1$.
(3) Déduire de (1) et (2) que $L = 0$, et conclure.