M2 2012-2013

Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n^o 2

Exercice 1. Soit B le shift sur $\ell_2(\mathbb{N})$, et soit S le shift "à droite". Soit également $\{z_i;\ i \geq 1\}$ un ensemble dénombrable dense dans $\ell_2(\mathbb{N})$, avec $z_i \in c_{00}$ pour tout i. Montrer que si les entiers n_i sont convenablement choisis, alors

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i} S^{n_i}(z_i)$$

est bien défini et est un vecteur hypercyclique pour $T = 2B$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C};\ |s| < 1\}$, le disque unité de $\mathbb{C}$. Pour $s \in \mathbb{D}$, on définit $x_s \in \ell_2(\mathbb{N})$ par $x_s = (s^i)_{i\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\mathrm{Vect}\{x_s;\ s \in U\}$ est dense dans $\ell_2(\mathbb{N})$, pour tout ouvert non vide $U \subset \mathbb{D}$.

Exercice 3. Soit B le shift sur $\ell_2(\mathbb{N})$. Montrer que $T = 2B$ vérifie le critère de Godefroy-Shapiro.

Exercice 4. Soit $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexes vérifiant $\inf_n |w_n| > 0$. On note $B_{\mathbf{w}}$ le shift à poids associé sur $\ell_2(\mathbb{N})$, et on pose $T = Id + B_{\mathbf{w}}$.

(1) Déterminer les valeurs propres de T, et les sous-espaces propres associés.
(2) Montrer que T vérifie le critère de Godefroy-Shapiro.

Exercice 5. Soit D l'opérateur de dérivation sur $H(\mathbb{C})$. Justifier l'identité $\tau_a = e^{aD}$ (pour tout $a \in \mathbb{C}$), et en déduire qu'un opérateur T sur $H(\mathbb{C})$ commute avec D si et seulement si il commute avec tous les opérateurs de translation τ_a.

Exercice 6. Montrer directement (i.e. sans utiliser le théorème de Godefroy-Shapiro), que l'opérateur de dérivation $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ vérifie le critère de Kitai.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Montrer à l'aide du théorème de Runge que l'opérateur de translation $\tau_a = H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ est topologiquement mélangeant.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et $H(\Omega, \Omega)$ l'ensemble des fonctions φ holomorphes sur Ω telles que $\varphi(\Omega) \subset \Omega$. Si $\varphi \in H(\Omega, \Omega)$, on note $C_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ l'opérateur défini par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. On dit que C_φ est l'**opérateur de composition** associé à φ.

(1) Montrer que si C_φ est hypercyclique, alors φ est nécessairement injective et possède la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \Omega$, on peut trouver un entier n tel que $\varphi^n(K) \cap K = \emptyset$.

(2) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que si $\varphi = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et non polynomiale, alors $\varphi(\{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1\})$ est dense dans $\mathbb{C}$, et en déduire que si $\varphi \in H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est injective, alors φ est une fonction polynomiale de degré 1.
   (b) Montrer que les seuls opérateurs de composition hypercycliques sur $H(\mathbb{C})$ sont les opérateurs de translation τ_a, $a \neq 0$.

(3) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{C}^*$.
   (a) Montrer que si $\varphi \in H(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ est injective, alors φ est de la forme $\varphi(z) = az$ ou $\varphi(z) = \frac{a}{z}$, pour une certaine constante $a \neq 0$.
   (b) Montrer qu'il n'existe pas d'opérateur de composition hypercyclique sur $H(\mathbb{C}^*)$.

Exercice 9. Montrer que l'opérateur de dérivation sur $H(\mathbb{C})$ est un quasi-facteur du shift sur $c_0(\mathbb{N})$.

Exercice 10. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive telle que $\sup_{t \geq 0} \frac{\omega(t)}{\omega(t+1)} < \infty$. On note $L_1(\mathbb{R}_+, \omega)$ l'ensemble des (classes d'équivalences de) fonctions mesurables $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vérifiant $\int_0^\infty |f(t)|\, \omega(t)\, dt < \infty$, muni de sa norme naturelle :

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(t)|\, \omega(t)\, dt\,.$$

(1) Justifier brièvement que $L_1(\mathbb{R}_+, \Omega)$ est un espace de Banach séparable et que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L_1(\mathbb{R}_+, \omega)$.

(2) Montrer qu'on définit un opérateur borné $B : L_1(\mathbb{R}_+, \omega) \to L_1(\mathbb{R}_+, \omega)$ en posant $Bf(t) = f(t+1)$.

(3) Montrer que si le "poids" ω vérifie $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$, alors B est topologiquement mélangeant.

(4) On suppose que ω vérifie $\liminf_{t\to\infty} \omega(t) = 0$, et satisfait de plus à la condition de "régularité" suivante : il existe une fonction continue $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$(*) \qquad \forall s, t \geq 0\ :\ \omega(t) \leq C(s)\, \omega(t+s)\,.$$

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_k = \frac{2^{-k}}{\sup_{s\in[0,k+1]} C(s)}\cdot$ Justifier l'existence d'une suite $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$ vérifiant $t_{k+1} \geq 1 + t_k$ et $\omega(t_k + k) \leq \varepsilon_k$ pour tout k.

(b) On note n_k la partie entière de t_k. Montrer que $\omega(t + n_k)$ tend vers 0 uniformément sur tout intervalle $[0, A]$.

(c) Montrer que l'opérateur B est hypercyclique.

(5) On suppose que B est hypercyclique.

(a) On pose $c = \inf_{t\in[0,1]} \omega(t)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver un entier $n > N$ et $f \in L_1(\mathbb{R}_+, \omega)$ tels que $\int_0^1 |f(t + n) - 1|\, \omega(t)\, dt < \frac{c}{2}$ et $\int_1^\infty |f(t)|\, \omega(t)\, dt < \varepsilon$. Montrer ensuite qu'on a $\int_n^{n+1} |f(t)|\, dt \geq \frac{1}{2}$ et $\int_n^{n+1} |f(t)|\, \omega(t)\, dt < \varepsilon$.

(b) Montrer que $\liminf_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

(6) Montrer que si B est topologiquement mélangeant et si ω vérifie $(*)$, alors $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

Exercice 11. Soit $p \in [1, \infty[$, et soit $A > 0$. Pour $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{p}$, on note ϕ_s la fonction de $L_p(]0, A[)$ définie par $\phi_s(x) = x^s$.

(1) Justifier qu'on a bien $\phi_s \in L_p(]0, A[)$.

(2) On note q l'exposant conjugué de p. Montrer que si $g \in L_q(]0, A[)$, alors la formule $F(s) = \int_0^A \phi_s(x) g(x)\, dx$ définit une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{p}\}$.

(3) Que peut-on dire d'une fonction $g \in L_q(]0, A[)$ vérifiant $\int_0^A x^n g(x)\, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(4) Montrer que $\mathrm{Vect}\,\{\phi_s;\ s \in I\}$ est dense dans $L_p(]0, A[)$, pour tout intervalle $I \subset]-\frac{1}{p}, \infty[$ (non réduit à un point).

Exercice 12. Soit $p \in]1, \infty[$, et soit $A > 0$. Pour $f \in L_p(]0, A[)$, on définit une fonction $Tf :]0, A[\to \mathbb{C}$ par

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

(1) Vérifier l'identité $Tf(x) = \int_0^1 f(xs)\, ds$, et en déduire que si $f \in L_p(]0, A[)$, alors $Tf \in L_p(]0, A[)$ et

$$\|Tf\|_{L_p} \leq q\, \|f\|_{L_p}\,,$$

où q est l'exposant conjugué de p. (*On peut par exemple raisonner par dualité, ou utiliser l'inégalité de Minkowski pour les intégrales*).

(2) Montrer que l'opérateur $T : L_p(]0, A[) \to L_p(]0, A[)$ vérifie le critère de Godefroy-Shapiro.