Dynamiques et opérateurs

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Montrer que tout espace compact métrisable est séparable.

Exercice 2. Montrer que dans un espace métrique séparable (X, d), il n'est pas possible de trouver une famille non-dénombrable de points $(f_i)_{i\in I}$ qui soit ε**-séparée** pour un certain $\varepsilon > 0$, i.e. $d(f_i, f_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$. En déduire que les espaces $\ell_\infty(\mathbb{N})$ et $L_\infty(0,1)$ ne sont pas séparables.

Exercice 3. Soit X un espace vectoriel topologique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est séparable;
(ii) il existe une partie $\mathcal{D} \subset X$ dénombrable et totale;
(iii) il existe une suite $(E_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de dimension finie telle que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N$ est dense dans X.

Exercice 4. Soit K un espace compact métrisable. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit d une distance compatible avec la topologie de K, et soit $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans K. On définit des fonctions $f_n \in \mathcal{C}(K)$ par $f_n(x) = d(x, x_n)$. Montrer que la suite (f_n) *sépare les points de* K : si $x, y \in K$ et $x \neq y$, on peut trouver un entier n tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$.
(2) Montrer que l'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ est séparable.

Exercice 5. Soit Ω un espace métrisable séparable, et soit μ une mesure borélienne positive sur Ω, supposée *sigma-finie*. Soit également $p \in [1, \infty[$. Le but de l'exercice est de montrer que l'espace de Banach $L_p(\Omega, \mu)$ est séparable.

(1) Dans cette question, on suppose que la mesure μ est finie.

(a) Soit $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts pour Ω. On note $\mathcal{V}$ la famille des ouverts $V \subset \Omega$ qui sont réunion d'un nombre fini de V_i. Montrer que pour tout ouvert $W \subset X$ et pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver $V \in \mathcal{V}$ tel que $V \subset W$ et $\mu(W \setminus V) < \alpha$. Montrer également que pour un tel V, on a $\|\mathbf{1}_V - \mathbf{1}_W\|_{L_p} < \alpha^{1/p}$.

(b) On admet que la mesure μ est *régulière*, ce qui signifie que pour tout borélien $A \subset \Omega$ et pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un ouvert W tel que $A \subset W$ et $\mu(W \setminus A) < \alpha$. Déduire de (a) que pour tout borélien $A \subset \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $V \in \mathcal{V}$ tel que $\|\mathbf{1}_V - \mathbf{1}_A\|_{L_p} < \varepsilon$.

(c) En déduire la séparabilité de $L_p(\Omega, \mu)$.

(2) Démontrer le résultat souhaité pour une mesure μ sigma-finie.

Exercice 6. (théorème de récurrence de Birkhoff)

Dans tout l'exercice, K est un espace topologique compact et $T : K \to K$ est une application continue. Un point $a \in K$ est dit **récurrent** pour T si, pour tout voisinage V de a, il existe une infinité d'entiers n tels que $T^n(a) \in V$. Le but de l'exercice est de montrer que T possède au moins 1 point récurrent.

(1) On note $\mathcal{I}$ la famille de tous les compacts non vides $L \subset K$ vérifiant $T(L) \subset L$. Montrer que $\mathcal{I}$ possède un élément minimal pour l'inclusion.

(2) Montrer que si $L \in \mathcal{I}$ est minimal pour l'inclusion et si $x \in L$, alors $O(x, T)$ est dense dans L.

(3) Conclure.

Exercice 7. (théorème de Kronecker)

Soient $\theta_1, \dots \theta_d \in \mathbb{R}$ tels que $\pi, \theta_1, \dots \theta_d$ sont **rationnellement indépendants**, i.e. linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On pose $g = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) \in \mathbb{T}^d$. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\{g^n;\ n \geq 1\}$ est dense dans $\mathbb{T}^d$, autrement dit que la "rotation" $R_g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ est transitive.

(1) Pour $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note $e_\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ la fonction définie par

$$e_\gamma(\xi_1, \dots, \xi_d) = \xi_1^{\gamma_1} \cdots \xi_d^{\gamma_d}$$

Vérifier que les e_γ sont des **caractères** de $\mathbb{T}^d$, c'est-à-dire des homomorphismes du groupe $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{T}$.

(2) Montrer que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\,\{e_\gamma;\ \gamma \in \mathbb{Z}^d\}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$.

(3) Montrer que si $\gamma \neq (0, \dots, 0)$ alors $e_\gamma(g) \neq 1$, et en déduire la limite de $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_\gamma(g^n)$ quand $N \to \infty$.

(4) On note m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^d$. Calculer $\int_{\mathbb{T}^d} e_\gamma dm$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^d$, puis montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u(g^n) = \int_{\mathbb{T}^d} u\, dm\,.$$

(5) Montrer que pour tout ouvert $V \subset \mathbb{T}^d$, on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d)$ positive, non identiquement nulle, et nulle en dehors de V.

(6) Conclure.

Exercice 8. Soit $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ l'application définie par $T(\xi) = \xi^2$. Montrer que T est topologiquement mélangeante.

Exercice 9. Montrer que si B est le shift (vers la gauche) sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors λB est topologiquement mélangeant pour tout $\lambda \neq 0$. À l'inverse, montrer qu'il n'est pas possible de trouver, sur un espace vectoriel normé $X \neq \{0\}$, un opérateur T tel que λT soit hypercyclique pour tout $\lambda \neq 0$.

Exercice 10. Dans cet l'exercice, on note $c_0(\mathbb{R}_+)$ l'espace de toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ bornées et tendant vers 0 à l'infini. On munit $c_0(\mathbb{R}_+)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (qui en fait un espace de Banach).

(1) Montrer que $c_0(\mathbb{R}_+)$ n'est pas séparable.

(2) Soit $B : c_0(\mathbb{R}_+) \to c_0(\mathbb{R}_+)$ l'application linéaire définie par $Bf(t) = f(t+1)$. Pourquoi B est-elle continue?

(3) Soient $u, v \in c_0(\mathbb{R}_+)$, et soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier N tel que $|u(t)| < \varepsilon$ pour $t \geq N$. Soit enfin $n \geq N$ et soit $f \in c_0(\mathbb{R}_+)$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} u(t) & 0 \leq t < n \\ 2^{-n} v(t-n) & t \geq n \end{cases}$$

Montrer qu'on a $\|f - u\|_\infty \leq \varepsilon + 2^{-n}\|v\|_\infty$.

(4) Montrer que l'opérateur $T = 2B$ est topologiquement mélangeant.

(5) L'opérateur T est-il hypercyclique?