Dynamiques et opérateurs

Examen du 1er Mars 2013

Durée : 4h

Questions "de cours".

(1) Soit X un espace de Banach séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que $\bigcup_{n\geqslant 1} \ker(T^n)$ est dense dans X et qu'il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|S\| < 1$ et $TS = Id$. Montrer que T est hypercyclique.

(2) Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, et soit $B_{\mathbf{w}}$ le shift à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$ associé à la suite $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = (1+\alpha_n)^{1/n}$. Montrer que le shift $B_{\mathbf{w}}$ est hypercyclique si et seulement si la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ est divergente.

(3) En considérant un opérateur bien choisi sur $H(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ possédant la propriété suivante : pour toute fonction φ holomorphe sur $\mathbb{C}$, il existe une suite d'entiers (n_k) telle que $5^{n_k} f^{(2n_k)}(z + 4n_k) \to \varphi(z)$ uniformément sur tout compact.

(4) Soit $B_{\mathbf{w}}$ un shift à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$ associé à une suite de poids $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sup_n |w_n| \leqslant 1$. On pose $V = \frac{Id + B_{\mathbf{w}}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n x = 0\,.$$

(5) Soit $g \in \mathbb{T}\backslash e^{2i\pi\mathbb{Q}}$, et soit A un borélien de $\mathbb{T}$. Enfin, soit m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Pour $\xi \in \mathbb{T}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $k_N(\xi)$ le nombre d'entiers $n \in [0, N-1]$ tels que $g^n\xi \in A$. Montrer que $\frac{k_N(\xi)}{N}$ tend vers $m(A)$ pour m-presque tout $\xi \in \mathbb{T}$.

(6) Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. En utilisant la caractérisation du mélange faible en termes de convergence en densité, montrer que si T est faiblement mélangeante par rapport à μ, alors $T \times T$ est faiblement mélangeante par rapport à $\mu \otimes \mu$.

Exercice 1. Soit $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive telle que $\sup_{t\geqslant 0} \frac{\omega(t)}{\omega(t+1)} < \infty$. On note $L_1(\mathbb{R}_+, \omega)$ l'ensemble des (classes d'équivalences de) fonctions mesurables $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vérifiant $\int_0^\infty |f(t)|\,\omega(t)\,dt < \infty$, muni de sa norme naturelle :

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(t)|\,\omega(t)\,dt\,.$$

(1) On rappelle que l'espace $L_1(\mathbb{R}_+)$ est séparable et que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L_1(\mathbb{R}_+)$. Montrer que $L_1(\mathbb{R}_+,\omega)$ est un espace de Banach séparable et que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L_1(\mathbb{R}_+,\omega)$.

(2) Montrer qu'on définit un opérateur borné $B : L_1(\mathbb{R}_+,\omega) \to L_1(\mathbb{R}_+,\omega)$ en posant $Bf(t) = f(t+1)$.

(3) Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue à support compact et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $S_n\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ par $S_n\varphi(t) = 0$ si $0 \leqslant t < n$ et $S_n\varphi(t) = \varphi(t-n)$ si $t \geqslant n$. Vérifier que $S_n\varphi \in L_1(\mathbb{R}_+,\omega)$ et déterminer $B^n S_n\varphi$.

(4) Montrer que si ω vérifie $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$, alors l'opérateur B est topologiquement mélangeant.

(5) On suppose que ω vérifie $\liminf_{t\to\infty} \omega(t) = 0$, et satisfait de plus à la condition suivante : il existe une fonction continue $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$(*) \qquad \forall s, t \geqslant 0 \ : \ \omega(t) \leqslant C(s)\,\omega(t+s)\,.$$

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_k = \frac{2^{-k}}{\sup_{s\in[0,k+1]} C(s)}\cdot$ Justifier l'existence d'une suite $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$ vérifiant $t_{k+1} \geqslant 1 + t_k$ et $\omega(t_k + k) \leqslant \varepsilon_k$ pour tout k.

   (b) On note n_k la partie entière de t_k. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \geqslant t$, majorer $\omega(t+n_k)$ en fonction de $\omega(k+t_k)$; puis montrer que $\omega(t+n_k)$ tend vers 0 uniformément sur tout intervalle $[0,A]$.

   (c) Montrer que l'opérateur B est hypercyclique.

(6) On suppose que B est hypercyclique.

   (a) On pose $c = \inf_{t\in[0,1]} \omega(t)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut trouver un entier $n > N$ et $f \in L_1(\mathbb{R}_+,\omega)$ tels que $\int_0^1 |f(t+n) - 1|\,\omega(t)\,dt < \frac{c}{2}$ et $\int_1^\infty |f(t)|\,\omega(t)\,dt < \varepsilon$. Montrer ensuite qu'on a $\int_n^{n+1} |f(t)|\,dt \geqslant \frac{1}{2}$ et $\int_n^{n+1} |f(t)|\,\omega(t)\,dt < \varepsilon$.

   (b) Montrer que $\liminf_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

(7) Montrer que si B est topologiquement mélangeant et si ω vérifie $(*)$, alors $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$.

Exercice 2. Soit $g \in \mathbb{T}$, et soit $S_g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ l'application définie par

$$S_g(\xi_1,\xi_2) = (g\xi_1, \xi_1\xi_2)\,.$$

(1) On note m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Montrer que S_g préserve la mesure $m \otimes m$.

(2) Pour toute fonction $u \in L_2(\mathbb{T}^2, m\otimes m)$, on note $\widehat{u}(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ les coefficients de Fourier de u : si $\gamma = (n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2$, alors

$$\widehat{u}(\gamma) = \int_{\mathbb{T}^2} \xi_1^{-n_1}\xi_2^{-n_2} u(\xi_1,\xi_2)\,dm(\xi_1)dm(\xi_2)\,.$$

Montrer que si $f \in L_2(\mathbb{T}^2, m \otimes m)$, alors

$$\forall \gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \widehat{f \circ S_g}(\gamma) = g^{n_1 - n_2} \widehat{f}(A\gamma) \,,$$

où A est la matrice 2×2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Montrer que pour tout $\gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n_2 \neq 0$, les $A^k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts, et en déduire que si $(c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de nombres complexes telle que $|c_\gamma| = |c_{A\gamma}|$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ et $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} |c_\gamma|^2 < \infty$, alors $c_\gamma = 0$ pour tout $\gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n_2 \neq 0$.

(4) On suppose que $g \notin e^{2i\pi\mathbb{Q}}$. Déduire des questions précédentes que S_g est ergodique par rapport à $m \otimes m$.

Exercice 3. Dans tout l'exercice, H un espace de Hilbert complexe et $V \in \mathcal{L}(H)$ est une contraction ($\|V\| \leqslant 1$). On fixe également $f \in H$. Enfin, on rappelle que pour une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la notation $a_n \xrightarrow{D} 0$ signifie que (a_n) tend en densité vers 0. Le but de l'exercice est de prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) f est orthogonal à $\mathcal{E}_V = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T}} \ker(V - \lambda Id)\right)$;

(ii) $\langle V^n f, f \rangle \xrightarrow{D} 0$;

(iii) $\langle V^n f, g \rangle \xrightarrow{D} 0$ pour tout $g \in H$.

(1) On note σ_f la mesure spectrale pour f associée à V, i.e. l'unique mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \widehat{\sigma}_f(n) = \langle V^n f, f \rangle \,.$$

(L'existence de σ_f a été démontrée en cours pour une isométrie, et en TD pour une contraction quelconque). En appliquant le théorème ergodique de von Neumann à l'opérateur aV, montrer que pour tout $a \in \mathbb{T}$, on a

$$\sigma_f(\{a\}) = \langle P_{\bar{a}} f, f \rangle \,,$$

où $P_{\bar{a}}$ est la projection orthogonale sur $\ker(V - \bar{a} Id)$.

(2) Montrer que (i) et (ii) sont équivalentes.

(3) Soit $G = \{g \in H;\ \langle V^n f, g \rangle \xrightarrow{D} 0\}$. Montrer que G est un sous-espace fermé de H.

(4) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ une contraction. Montrer qu'on a $\|x - S^*Sx\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \|Sx\|^2$ pour tout $x \in H$, et en déduire que

$$\forall x, y \in H \ : \ |\langle x, y \rangle - \langle Sx, Sy \rangle| \leqslant \sqrt{\|x\|^2 - \|Sx\|^2}\ \|y\| \,.$$

(5) Montrer que la suite $(\|V^n f\|)$ est convergente et en déduire, à l'aide de (4), qu'on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ \lim_{n\to\infty} |\langle V^n f, f\rangle - \langle V^{n+k} f, V^k f\rangle| = 0\,.$$

(6) Montrer que si (ii) est vérifiée, alors le sous-espace G de (3) contient tous les $V^k f$, $k \in \mathbb{N}$.

(7) Conclure.