Dynamiques et opérateurs

Examen du 8 Janvier 2013

Durée : 4h

Questions "de cours".

(1) Soient $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux applications continues, où X et Y sont des espaces topologiques. Montrer que si T est topologiquement mélangeante et S topologiquement transitive, alors $T \times S = X \times Y \to X \times Y$ est topologiquement transitive.

(2) Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T commute avec un opérateur $R \in \mathcal{L}(X)$ tel que $R \neq 0$ et $Y = \mathrm{Im}(R)$ est de dimension finie. Montrer que T n'est pas hypercyclique.

(3) Soit X un espace de Banach séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que $\bigcup_{n \geqslant 1} \ker(T^n)$ est dense dans X et qu'il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|S\| < 1$ et $TS = Id$. Montrer que T est hypercyclique.

(4) Soit $B_{\mathbf{w}}$ le shift à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$ associé à la suite $\mathbf{w} = (w_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $w_n = \left(1 + \frac{1}{\log(n+1)}\right)^{1/n}$. Le shift $B_{\mathbf{w}}$ est-il hypercyclique?

(5) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ possédant la propriété suivante : pour toute fonction φ holomorphe sur $\mathbb{C}$, il existe une suite d'entiers (n_k) telle que $2^{n_k} f^{(n_k)}(z + 6n_k) \to \varphi(z)$ uniformément sur tout compact.

(6) Soit B le shift (à gauche) sur $\ell_2(\mathbb{N})$, et soit $T = 3B^5 - Id$. On note $\widetilde{T}$ l'opérateur sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ défini par T, obtenu en identifiant $H^2(\mathbb{D})$ et $\ell_2(\mathbb{N})$ de la manière habituelle. Vérifier que pour toutes fonctions $f, g \in H^2(\mathbb{D})$, on a $\langle \widetilde{T} f, g \rangle_{H^2} = \langle f, \phi g \rangle_{H^2}$, où $\phi(z) = 3z^5 - 1$, et en déduire que T est hypercyclique.

(7) Soit T un opérateur sur $\ell_2(\mathbb{N})$ dont la matrice dans la "base canonique" de $\ell_2(\mathbb{N})$ est triangulaire inférieure. En considérant l'adjoint de T, montrer que T n'est pas hypercyclique.

(8) Soit T un opérateur hypercyclique sur un espace de Banach complexe. On suppose que T possède une valeur propre de module différent de 1. Montrer que le spectre de T n'est pas dénombrable.

(9) Soit $B_{\mathbf{w}}$ un shift à poids sur $\ell_2(\mathbb{N})$ associé à une suite de poids $\mathbf{w} = (w_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $\sup_n |w_n| \leqslant 1$. On pose $V = \frac{Id + B_{\mathbf{w}}}{2}\cdot$ Montrer que pour tout $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V^n x = 0\,.$$

(10) Soit $g \in \mathbb{T} \backslash e^{2i\pi\mathbb{Q}}$, et soit A un borélien de $\mathbb{T}$. Enfin, soit m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Pour $\xi \in \mathbb{T}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on note $k_N(x)$ le nombre d'entiers $n \in [0, N-1]$ tels que $g^n\xi \in A$. Montrer que $\frac{k_N(\xi)}{N}$ tend vers $m(A)$ pour m-presque tout $\xi \in \mathbb{T}$.

(11) Soit K un espace compact métrisable, soit $T : K \to K$ borélienne, et soit μ une mesure de probabilité borélienne sur K telle que T est ergodique par rapport à μ. En utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(K)$, montrer qu'il existe un point $x \in K$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) \ : \ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) = \int_K f \, d\mu \, .$$

(12) Soit K un espace compact métrisable,et soit $T : K \to K$ continue. On suppose qu'il existe exactement une mesure de probabilité borélienne μ sur K telle que T est ergodique par rapport à μ. Montrer que μ est la seule mesure de probabilité borélienne sur K invariante par T.

(13) Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. En utilisant la caractérisation du mélange faible en termes de convergence en densité, montrer que si T est faiblement mélangeante par rapport à μ, alors $T \times T$ est faiblement mélangeante par rapport à $\mu \otimes \mu$.

Exercice 1. Soit X un evt Polonais, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Pour $x \in X$ et $V \subset X$ ouvert non-vide, on pose $\mathcal{N}(x, V) = \{n \in \mathbb{N};\ T^n(x) \in V\}$. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in X$ tel que

$$\forall V \text{ ouvert } \neq \varnothing \ : \ \overline{\text{dens}}\,(\mathcal{N}(x_0, V)) > 0\,,$$

où, pour $S \subset \mathbb{N}$, on note

$$\overline{\text{dens}}\,(S) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\sharp(S \cap [0, N-1])}{N} \cdot$$

Le but de l'exercice est de montrer que T vérifie le critère d'hypercyclicité.

On utilisera les notations et définitions suivantes. Pour $A, B \subset \mathbb{N}$, on pose $A - B = \{a - b;\ (a, b) \in A \times B, a \geqslant b\}$. Pour $A \subset \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on pose $A + j = \{a + j;\ a \in A\}$ et $A - j = \{a - j;\ a \in A, a \geqslant j\}$. Pour $U, V \subset X$ ouverts non-vides, on pose $\mathcal{N}(U, V) = \{n \in \mathbb{N};\ T^n(U) \cap V \neq \varnothing\}$. Enfin, on rappelle qu'un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ est dit **épais** s'il contient des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur arbitrairement grande, et on dit qu'un ensemble $B \subset \mathbb{N}$ est **à trous bornés** s'il existe un entier L tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in B \ : \ |k - n| \leqslant L\,.$$

(0) Pourquoi T est-il hypercyclique?

(1) Montrer que si $A \subset \mathbb{N}$ est épais et $B \subset \mathbb{N}$ est à trous bornés, alors $A \cap (p + B) \neq \varnothing$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que si U est un ouvert non vide de X et si W est un voisinage de 0, alors $\mathcal{N}(U,W)$ est épais.

(3) Montrer que si $x \in X$ et si V et W sont des ouverts non-vides de X, alors $\mathcal{N}(x,V) - \mathcal{N}(x,W) \subset \mathcal{N}(W,V)$.

(4) Montrer que si $x \in HC(T)$ et si V, W sont des ouverts non-vides de X, alors on peut trouver un ouvert non-vide $V' \subset V$ et un entier p tel que $p + \mathcal{N}(x,V') \subset \mathcal{N}(x,W)$.

(5) On *admet* que si $S \subset \mathbb{N}$ vérifie $\overline{\mathrm{dens}}(S) > 0$, alors $S - S$ est à trous bornés. Déduire des questions précédentes que T vérifie le critère d'hypercyclicité.

(6) *Bonus.* Dans cette question on veut démontrer le résultat admis à la question (5). On fixe donc $S \subset \mathbb{N}$ vérifiant $\overline{\mathrm{dens}}(S) = \alpha > 0$.

   (a) Montrer que si $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ sont tels que les ensembles $S-j_1, \dots, S-j_m$ sont deux-à-deux disjoints, alors $\overline{\mathrm{dens}}((S-j_1) \cup \cdots \cup (S-j_m)) = m\alpha$.

   (b) En déduire qu'il existe un ensemble fini J de cardinalité maximale tel que les ensembles $S-j$, $j \in J$ sont deux-à-deux disjoints.

   (c) On pose $q = \max J$. Montrer que $\mathbb{N}\backslash[0,q] \subset \bigcup_{j \in J}((S-S)+j)$.

   (d) Montrer que $S - S$ est à trous bornés.

Exercice 2. Soit $g \in \mathbb{T}$, et soit $S_g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ l'application définie par

$$S_g(\xi_1, \xi_2) = (g\xi_1, \xi_1\xi_2)\,.$$

(1) On note m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Montrer que S_g préserve la mesure $m \otimes m$.

(2) Pour toute fonction $u \in L_2(\mathbb{T}^2, m \otimes m)$, on note $\hat{u}(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ les coefficients de Fourier de u : si $\gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, alors

$$\hat{u}(\gamma) = \int_{\mathbb{T}^2} \xi_1^{-n_1} \xi_2^{-n_2} u(\xi_1, \xi_2)\, dm(\xi_1) dm(\xi_2)\,.$$

Montrer que si $f \in L_2(\mathbb{T}^2, m \otimes m)$, alors

$$\forall \gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \widehat{f \circ S_g}(\gamma) = g^{n_1 - n_2} \hat{f}(A\gamma)\,,$$

où A est la matrice 2×2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Montrer que pour tout $\gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n_2 \neq 0$, les $A^k\gamma$, $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts, et en déduire que si $(c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de nombres complexes telle que $|c_\gamma| = |c_{A\gamma}|$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ et $\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} |c_\gamma|^2 < \infty$, alors $c_\gamma = 0$ pour tout $\gamma = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n_2 \neq 0$.

(4) On suppose que $g \notin e^{2i\pi\mathbb{Q}}$. Déduire des questions précédentes que S_g est ergodique par rapport à $m \otimes m$.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction ($\|T\| \leqslant 1$). Soit également $x \in H$. On suppose que la suite $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que pour toute suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 1}$, on a

$$\lim_{K\to\infty} \left\| \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} T^{n_k} x \right\| = 0\,.$$

(0) On note σ_x la mesure spectrale pour x associée à T, i.e. l'unique mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \widehat{\sigma}_x(n) = \langle T^n x, x\rangle\,.$$

(L'existence de σ_x a été démontrée en cours pour une isométrie, et en TD pour une contraction quelconque). Pourquoi σ_x est-elle une mesure de Rajchman?

(1) L'objectif de cette question est de montrer que pour tout polynôme P, on a l'inégalité suivante :

$$\text{(vN)} \qquad \|P(T)x\|^2 \leqslant \int_{\mathbb{T}} |P(t)|^2 d\sigma_x(t)\,.$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{k+1} t^{k+1}$ un polynôme de degré $k+1$. On pose $Q(t) = P(t) - a_0$ et $u(t) = \frac{Q(t)}{t}$.

(i) Comparer d'une part $\|Q(T)x\|$ et $\|u(T)x\|$, et d'autre part $|Q(t)|$ et $|u(t)|$ pour $t \in \mathbb{T}$.

(ii) Montrer qu'on a

$$\|P(T)x\|^2 = |a_0|^2\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{a_0}\int_{\mathbb{T}} Q(t)\, d\sigma_x(t)\right) + \|Q(T)x\|^2.$$

(b) Démontrer (vN) par récurrence sur le degré de P.

(2) Montrer à l'aide de (vN) que si $n_1 < \cdots < n_K$ sont des entiers positifs, alors

$$\|T^{n_1}x + \cdots + T^{n_K}x\|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{K} \widehat{\sigma}_x(n_i - n_j)\,.$$

(3) Soit $A > 0$ et soient $n_1 < \cdots < n_K$ des entiers positifs. Majorer en fonction de A et K le nombre de couples (i,j) tels que $|n_i - n_j| \leqslant A$.

(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 4. Soit $T : L_2([0,2\pi]) \to L_2([0,2\pi])$ l'opérateur défini par

$$Tf(t) = e^{it} f(t) - \int_0^t i e^{is} f(s)\, ds\,.$$

Soit également $\Lambda \subset \mathbb{T}$ un arc de cercle fermé non trivial tel que $1 \notin \Lambda$. Pour $\lambda \in \Lambda$ s'écrivant $\lambda = e^{ix}$ avec $0 < x < 2\pi$, on définit $e_\lambda \in L_2([0, 2\pi])$ par $e_\lambda = \mathbf{1}_{]x,2\pi]}$. Enfin, on note H_Λ le sous-espace fermé de $L_2([0, 2\pi])$ engendré par $\{e_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$. Montrer que H_Λ est stable par T et que la restriction de T à H_Λ est un opérateur mélangeant au sens gaussien.