Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Intégration*

Examen du 14 Mai 2013

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soient (α_n) et (β_n) deux suite décroissantes de réels strictement positifs tendant vers 0. En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer qu'on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{e^{-\alpha_n t}}{t^{1+\beta_n}}\,dt=\infty$.

(2) Soit $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ un espace mesuré, et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. En utilisant si nécessaire l'inégalité $\ln(1+u)\leq u$, montrer qu'on a
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \ln\bigl(1+\varepsilon\, f(t)\bigr)\,d\mu(t)=\int_\Omega f\,d\mu\,.$$

(3) Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. Montrer que la formule $f(x)=\int_\mathbb{R}\frac{\varphi(t)}{1+xt^2}\,dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(4) Soit $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty\int_\Omega |f_n|\,d\mu<\infty$. Montrer que la série $\sum f_n(t)$ converge pour presque tout $t\in\Omega$.

(5) Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}^d$, et soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ est une fonction borélienne positive. Soit également $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ croissante telle que $\varphi(0)=0$. Enfin, soit μ la mesure de Lebesgue sur Ω. Vérifier qu'on a
$$\mu(\{x\in\Omega;\ f(x)>t\})=\int_\Omega \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(t)\,d\mu(x)$$
pour tout $t\in\mathbb{R}^+$, puis établir la formule
$$\int_\Omega \varphi(f(x))\,d\mu(x)=\int_0^\infty \varphi'(t)\,\mu(\{x\in\Omega;\ f(x)>t\})\,dt\,.$$

(6) Soit $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ y\leq x^2+1 \text{ et } x+y\leq 7\}$. Dessiner soigneusement $\mathcal{D}$, puis calculer l'intégrale $I=\int_\mathcal{D} xy\,dxdy$.

(7) Soit $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0<x<y \text{ et } x^2+y^2<4\}$. Calculer l'intégrale $J=\int_\Omega xy\,dxdy$ en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer la somme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, .$$

(1) Soit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ;\ u > 0 \, , \, v > 0 \, , \, u + v < \pi/2\}$. Dessiner Ω et calculer sa mesure de Lebesgue $\lambda_2(\Omega)$.

(2) Dans cette question, on *admet* que l'application $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right)$$

est un difféomorphisme de Ω sur le carré $]0,1[\times]0,1[$. Utiliser ce fait pour montrer qu'on a

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1 - x^2y^2} = \lambda_2(\Omega).$$

(3) Justifier que

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1 - x^2y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{]0,1[\times]0,1[} x^{2k} y^{2k} \, dxdy \, .$$

(4) Déduire des questions précédentes la valeur de

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \, .$$

(5) Calculer S.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer les intégrales "généralisées"

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos(x^2) \, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin(x^2) \, dx$$

après avoir démontré leur existence.

(1) Dans cette question on montre que I_1 et I_2 existent et on les relie à une troisième intégrale.
   (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_1^X \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \, dt$ admet une limite quand $X \to \infty$.
   (b) En déduire que l'intégrale "généralisée" I suivante est bien définie :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \, dt \, .$$

(c) Montrer qu'on peut écrire $I = 2\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx$, et conclure que I_1 et I_2 existent, avec

$$I_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(I) \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(I)\,.$$

(2) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $]0,\infty[$. Dans la suite, on posera

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{(i-\lambda)t}}{\sqrt{t}}\,dt\,.$$

(3) Dans cette question, on veut montrer qu'on a

$$\lim_{\lambda\to 0^+} F(\lambda) = I\,.$$

On ne supposera connu aucun résultat sur les transformées de Laplace.

(a) Pour $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \int_0^t \frac{e^{is}}{\sqrt{s}}\,ds$. Quelles sont les limites de $\varphi(t)$ quand $t \to 0^+$ et quand $t \to \infty$?

(b) En intégrant $\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,e^{-\lambda t}$ par parties sur des intervalles de la forme $[\varepsilon, X]$ (avec $0 < \varepsilon < X < \infty$), montrer qu'on a

$$\forall \lambda > 0 \ : \ F(\lambda) = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-t}dt\,.$$

(c) Démontrer le résultat souhaité.

(4) Dans cette question, on détermine explicitement la fonction F.

(a) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$, avec

$$F'(\lambda) = -\int_0^\infty \sqrt{t}\,e^{(i-\lambda)t}dt\,.$$

(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que F est solution de l'équation différentielle

$$F'(\lambda) = -\frac{1}{2(\lambda - i)}\,F(\lambda)\,.$$

(c) Déterminer les primitives de $a(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i} = \frac{\lambda + i}{1+\lambda^2}$, puis montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall \lambda > 0 \ : \ F(\lambda) = C\,\frac{e^{-\frac{i}{2}\arctan(\lambda)}}{(\lambda^2+1)^{1/4}}\,.$$

(d) Dans cette question, on pourra *admettre* que $\int_0^\infty e^{-v^2}dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(i) En revenant à la définition de F, montrer qu'on a

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty e^{i\frac{u}{\lambda}}\,\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty e^{i\frac{v^2}{\lambda}}\,e^{-v^2}\,dv.$$

(ii) En déduire que $F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ quand $\lambda \to \infty$, puis déterminer la valeur de la constante C dans (c).

(5) Déduire des questions précédentes la valeur de I, puis calculer I_1 et I_2.