Corrigé succinct de l'examen d'Intégration

Questions de cours.

(1) Si on pose $f_n(t) = \frac{e^{-\alpha_n t}}{t^{1+\beta_n}}$, alors $f_n(t)$ tend vers $\frac{1}{t}$ quand $n \to \infty$, pour tout $t \in [1, \infty[$. De plus, pour tout $t \geq 1$, la suite $(f_n(t))$ est croissante car $e^{-\alpha_n t}$ croit et $t^{1+\beta_n}$ décroit ($t \geq 1$ *est important ici*). Par convergence monotone, J_n tend vers $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \infty$.

(2) Comme $\ln(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$, on voit que $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\ln(1+\varepsilon f(t))$ tend vers $f(t)$ quand $\varepsilon \to 0^+$, pour tout $t \in \Omega$. De plus, comme $f(t) \geq 0$ et $\ln(1+u) \leq u$, on a $0 \leq f_\varepsilon(t) \leq f(t)$, donc $|f_\varepsilon(t)| \leq |f(t)|$ pour tout t et pour tout $\varepsilon > 0$. Comme f est intégrable, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (dans sa version "continue") pour conclure que $\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \ln(1+\varepsilon f(t))\, d\mu(t)$ tend vers $\int_\Omega f\, d\mu$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

(3) Il faut (évidemment) appliquer le théorème sur les intégrales à paramètres. Le point clé est que si K est un compact de $]0, \infty[$, alors on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\forall x \in K \ : \ t \geq \delta$, ce qui donne $\frac{1}{1+xt^2} \leq \frac{1}{1+\delta t^2}$ pour $x \in K$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Soit $\varphi : \Omega \to [0, \infty]$ la fonction mesurable positive définie par $\varphi(t) = \sum_0^\infty |f_n(t)|$. Comme tout est positif, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \Omega \varphi d\mu &= \int_\Omega \left(\sum_{n=0}^\infty |f_n| \right) d\mu \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_\Omega |f_n|\, d\mu\,. \end{aligned}$$

En particulier, on a $\int_\Omega \varphi\, d\mu < \infty$, donc $\varphi(t) < \infty$ presque partout. Autrement dit, la série $\sum f_n(t)$ est absolument convergente (et donc convergente) pour presque tout $t \in \Omega$.

(5) On a $\int_\Omega \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(t)\, d\mu(x) = \int_\Omega \mathbf{1}_{]t,\infty[}(f(x)\, d\mu(x) = \mu(\{x \in \Omega;\ f(x) > t\})$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. La formule demandée s'en déduit en appliquant le théorème de Fubini et en se souvenant que $\varphi(u) = \int_0^u \varphi'(t) dt$ pour tout $u \geq 0$ (car $\varphi(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi'(t)\,\mu(\{x\in\Omega;\ f(x)>t\})\,dt &= \int_{\mathbb{R}^+}\varphi'(t)\left(\int_\Omega \mathbf{1}_{[0,f(x)[}(t)\,d\mu(x)\right)dt\\
&= \int_\Omega\left(\int_{\mathbb{R}^+}\mathbf{1}_{[0,f(x)[}(t)\varphi'(t)\,dt\right)d\mu(x)\\
&= \int_\Omega\left(\int_0^{f(x)}\varphi'(t)\,dt\right)d\mu(x)\\
&= \int_\Omega \varphi(f(x))\,dx\,.
\end{aligned}$$

(6) Pas de problème particulier une fois qu'on a bien dessiné le domaine. La droite et la parabole se coupent au point de coordonnées $(2,5)$. On peut appliquer Fubini car tout est positif et on obtient

$$I = \int_0^2\left(\int_0^{x^2+1} xy\,dy\right)dx + \int_2^7\left(\int_0^{7-x} xy\,dy\right)dx\,.$$

Il faut ensuite finir le calcul.

(7) De même, pas de difficulté une fois qu'on a dessiné Ω et constaté qu'en coordonnés polaires, il correspond à $0<r<2$ et $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\cdot$ Bien sûr, il ne faut pas oublier que $dxdy$ devient $rdrd\theta$.

Exercice 1. (1) On voit que Ω est un triangle rectangle isocèle de "petits côtés" égaux à $\frac{\pi}{2}\cdot$ Donc $\lambda_2(\Omega)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}\cdot$

(2) On applique soigneusement la formule de changement de variables en posant $(x,y)=\Phi(u,v)$. Les calculs sont simples.

(3) On écrit $\frac{1}{1-x^2y^2}=\sum_0^\infty(x^2y^2)^k=\sum_0^\infty x^{2k}y^{2k}$ et on permute la somme et l'intégrale, ce qui est permis car tout est positif.

(4) Par Fubini, on a $\int_{]0,1[\times]0,1[}x^{2k}y^{2k}\,dxdy=\frac{1}{(2k+1)^2}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et par les questions précédentes on en déduit que $S_1=\int_{]0,1[\times]0,1[}\frac{dxdy}{1-x^2y^2}=\lambda_2(\Omega)=\frac{\pi^2}{8}\cdot$

(5) On a $S=\sum_1^\infty\frac{1}{(2k)^2}+\sum_0^\infty\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}S+S_1$, ce qui donne $S=\frac{4}{3}\,S_1=\frac{\pi^2}{6}$, comme attendu.

Exercice 2. (1) (a) On a $\int_1^X\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt=\left[\frac{e^{it}}{i\sqrt{t}}\right]_1^X+\frac{1}{2i}\int_1^X\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\,dt$. Le "crochet" admet une limite quand $X\to\infty$ car $\frac{1}{\sqrt{X}}\to 0$, et l'intégrale du membre de droite aussi car $\frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,\infty[$. D'où le résultat.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, et (a) dit que $\int_1^X \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée. Donc I est bien définie.

(c) Changement de variable $x = \sqrt{t}$.

(2) La fonction considérée est intégrable sur $]0,1]$ car $\left|\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,e^{-\lambda t}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, et elle est également intégrable sur $[1,\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,e^{-\lambda t}\right| \leq e^{-\lambda t}$ si $t \geq 1$.

(3) (a) Par définition, $\varphi(t)$ tend vers I quand $t \to \infty$, et $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$ par convergence dominée (écrire par exemple $\varphi(t) = \int_0^1 \mathbf{1}_{]0,t]}(s)\frac{e^{is}}{\sqrt{s}}\,ds$ et utiliser le fait que $\frac{e^{is}}{\sqrt{s}}$ est intégrable sur $]0,1]$).

(b) On suit l'indication calmement, en utilisant le fait que $\varphi'(t) = \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\cdot$ A la fin du calcul, il faut faire un changement de variable évident.

(c) Par (a), on $\lim_{\lambda\to 0^+} \varphi\left(\frac{t}{\lambda}\right) = I$ pour tout $t > 0$. De plus, φ est bornée sur $]0,\infty[$ car continue avec des limites finies en 0 et en $+\infty$. Par convergence dominée, on en déduit que $F(\lambda)$ tend vers $\int_0^\infty I \times e^{-t}\,dt = I$ quand $\lambda \to 0^+$.

(4) (a) On applique le théorème sur les intégrales à paramètres, en utilisant la 2è formule pour $F(\lambda)$ donnée dans (2). Le point clé est que si K est un compact de $]0,\infty[$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\forall \lambda \in K \ :\ \lambda \geq \delta$, ce qui donne $|e^{(i-\lambda)t}| \leq e^{-\delta t}$ pour $\lambda \in K$ et pour tout $t \in]0,\infty[$.

(b) On utilise (a) et on intègre calmement par parties sur des intervalles $[\varepsilon, X]$, en primitivant $e^{(i-\lambda)t}$ et en dérivant $\sqrt{t}$.

(c) Comme $a(\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{i}{1+\lambda^2}$, les primitives de $a(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i} = \frac{\lambda+i}{1+\lambda^2}$ sont de la forme $A(\lambda) = \frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2) + i\arctan(\lambda) + cte$. On applique ensuite la formule pour les solutions d'une équation différentielle linéaire "homogène" (formule qui *doit impérativement être connue*).

(d) (i) Changements de variables $u = \lambda t$ puis $v = \sqrt{u}$.

(ii) En appliquant le théorème de convergence dominée, on voit que $\int_0^\infty e^{i\frac{v^2}{\lambda}} e^{-v^2} dv$ tend vers $\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand $\lambda \to \infty$. D'après (b), on en déduit que$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ quand $\lambda \to \infty$. D'autre part, comme $(1+\lambda^2)^{1/4} \sim \sqrt{\lambda}$ quand $\lambda \to \infty$ et comme $\arctan(\lambda) \to \frac{\pi}{2}$, on déduit de (c) que $F(\lambda) \sim C\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\lambda}}\cdot$ On a donc $Ce^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$, i.e. $C = \sqrt{\pi}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(5) D'après (4), on a $F(\lambda) = \sqrt{\pi}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{e^{-\frac{i}{2}\arctan(\lambda)}}{(\lambda^2+1)^{1/4}}$ pour tout $\lambda > 0$, et d'après (3) $F(\lambda)$ tend vers I quand $\lambda \to 0^+$. Donc $I = \sqrt{\pi}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, et donc (par (1)) $I_1 = I_2 = \sqrt{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.