Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + y + z + \frac{a}{xyz}$, où $a > 0$ est fixé.

(1) Soit $\alpha > 0$. Montrer que si $u = (x,y,z) \in \Omega$ vérifie $f(u) \leq \alpha$ alors $xyz \geq a/\alpha$, et en déduire que l'ensemble $\{u \in \Omega;\ f(u) \leq \alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que f possède un minimum global et déterminer ce minimum.

Exercice 2. Soient $a, b > 0$. Déterminer $\inf \left\{ xy + \frac{a}{x} + \frac{b}{y};\ x > 0, y > 0 \right\}$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$, soit $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 + x_i} \cdot$$

(1) Montrer qu'on a $f(x_1, \ldots, x_n) \leq x_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, et en déduire que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $\{x \in \Omega;\ f(x) \geq \alpha\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

(2) Montrer que f possède un maximum global et déterminer la valeur de ce maximum.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien, et soient $a_1, \ldots, a_n \in E$. Soient également $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs non tous nuls. Montrer qu'il existe un unique point $x \in E$ minimisant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \|x - a_i\|^2$ et déterminer ce point.

Exercice 5. (point de Fermat)
Dans tout l'exercice, ABC est un triangle dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ dont tous les angles sont de mesure $< 2\pi/3$. Si M est un point du plan, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC\,.$$

(1) Montrer que la fonction f possède un minimum global.

(2) On note 2α la mesure de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ABC.

  (a) Si M est un point de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$, exprimer MB en fonction de AB, AM et α. De même, exprimer MC en fonction de AC, AM et α.

(b) Pour $\varepsilon \geq 0$, on note M_ε le point de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ tel que $M_\varepsilon A = \varepsilon$. Déduire de (a) que les fonctions $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon B$ et $\varepsilon \mapsto M_\varepsilon C$ sont dérivables en 0^+ et déterminer leurs dérivées en 0.

(c) Conclure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$f(M_\varepsilon) = AB + AC - c\varepsilon + o(\varepsilon)$$

au voisinage de 0.

(3) Montrer que les points A, B et C ne minimisent pas la fonction f.

(4) Montrer que f est différentiable sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$, et pour $M \in \Omega$, exprimer $\nabla f(M)$ à l'aide des longueurs MA, MB, MC et des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

(5) Montrer qu'il existe un unique point M minimisant $MA + MB + MC$, et que ce point est caractérisé par la propriété suivante : les 3 angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMA}$ ont pour mesure $2\pi/3$.

Exercice 6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiable. On suppose que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

(1) Soit B un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{B} \subset \Omega$, et soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable. On suppose qu'il existe un point $a \in B$ tel que $\varphi(a) < \varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in \partial B$. Montrer qu'il existe un point $u \in B$ tel que $d\varphi(u) = 0$.

(2) Soit $a \in \Omega$ quelconque.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n \ : \ \|Df(a)h\| \geq \varepsilon \|h\|$.

(b) Montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(a, \delta) \subset \Omega$ et $\|f(\xi) - f(a)\| \geq \varepsilon/2$ pour tout $\xi \in \partial B(a, \delta)$.

(c) Soit $v \in B(f(a), \varepsilon/4)$. En appliquant (1), à $\varphi(x) = \|f(x) - v\|^2$, montrer qu'il existe un point $u \in B(a, \delta)$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle Df(u)h, f(u) - v\rangle = 0$$

(d) Montrer que $B(f(a), \varepsilon/4) \subset f(B(a, \delta))$.

(3) Conclure.

Exercice 7. (calcul des variations)
Dans tout l'exercice, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ muni de la norme $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$. On définit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(u) = \int_0^1 \mathcal{L}(t, u(t), u'(t))\, dt \ .$$

Montrer que Φ est différentiable sur E et que sa différentielle est donnée par

$$d\Phi(u)h = \int_0^1 \Big[\partial_2\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))h(t) + \partial_3\mathcal{L}(t,u(t),u'(t))h'(t)\Big]\,dt\,.$$

(2) Soient $p, q \in \mathbb{R}$ fixés. On pose $\mathcal{E}_{pq} = \{u \in E;\ u(0) = p\,, u(1) = q\}$ et $E_0 = \{h \in E;\ h(0) = 0 = h(1)\}$. Montrer que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{pq}$, alors $d\Phi(u)h = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$.

(3) On garde les notations de (2).
  (a) Montrer que si $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $\int_0^1 c(t)h'(t)\,dt = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$, alors c est nécessairement constante.
  (b) En déduire que si une fonction $u \in \mathcal{E}_{pq}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{pq}$, alors u doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\Big[\partial_3\mathcal{L}\left(t, u(t), u'(t)\right)\Big] = \partial_2\mathcal{L}\left(t, f(t), f'(t)\right).$$

(4) Dans cette question, on prend $\mathcal{L}(t,u,v) = \sqrt{1+v^2}$.
  (a) Montrer que la fonction Φ est convexe.
  (b) Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{E}_{p,q}$ minimisant Φ, et déterminer cette fonction.
  (c) Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Exercice 8. (théorème de Rolle dans $\mathbb{R}^n$)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et différentiable dans Ω. On suppose que f est constante sur $\partial\Omega$. Montrer qu'il existe un point $c \in \Omega$ tel que $df(c) = 0$.

Exercice 9. Soit E un evn de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe un point $c \in E$ tel que $Df(c) = 0$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f n'est pas minorée, mais admet un minimum local. Montrer que f' s'annule au moins deux fois.

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^3$
(b) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
(c) $f(x,y) = x^2 - y^2 + e^{1-x^2}$
(d) $f(x,y) = x^2 + y^4$
(e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$
(f) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$

Exercice 12. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - y^3 + x^2 - 2y^2 - 6x + 3y$.

Exercice 13. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^3 - x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 7x - 8y - 6z$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

(1) Déterminer les extrema locaux de f.
(2) On note Δ le triangle plein (fermé) délimité par les droites d'équation $y = -1$, $y = 2 + x$ et $y = 2 - x$.
  (a) Pourquoi f possède-t-elle un maximum et un minimum sur Δ?
  (b) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$

(1) Montrer que f possède un minimum global en $(0, 0)$ et ne possède pas d'autre extremum local.
(2) Montrer que f possède un maximum sur le carré $C = [0, 2] \times [0, 2]$, et déterminer ce maximum.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Montrer que f n'est pas minorée, qu'elle admet un minimum local, et que Df ne s'annule qu'une fois. Comparer avec l'exercice 10.

Exercice 17. (principe du maximum)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω. On suppose qu'on a $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $f(x) \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi)$ pour tout $x \in \Omega$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x) + 2^{-n}\|x\|^2$.
  (a) Montrer qu'on a $\Delta f_n(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, et en déduire que f_n n'admet pas de maximum local dans Ω.
  (b) Pourquoi f_n possède-t-elle un maximum global sur $\overline{\Omega}$?
  (c) Déduire de (a) et (b) que $\forall x \in \Omega \,:\, f_n(x) \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) + 2^{-n}M$, où M est une constante indépendante de n.
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 18. (inégalité de Jensen)
Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E et soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(1) Établir par récurrence sur n le résultat suivant : si $x_1, \ldots, x_n \in C$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ vérifient $\sum_1^n \lambda_i = 1$, alors $\sum_1^n \lambda_i x_i \in C$.

(2) Montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifient $\sum_1^n \lambda_i = 1$ et si $x_1, \ldots, x_n \in C$, alors
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\,.$$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est une fonction affine si et seulement si f est convexe et $\Delta f = 0$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \log(e^x + e^y)$. Montrer que f est convexe.

Exercice 21. Soit $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ et soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{x_1 \cdots x_n}\cdot$$
Montrer que la fonction $\log g$ est convexe, puis que g est convexe.

Exercice 22. Soit $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, soit $a > 0$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = x_1 + \cdots + x_n + \frac{a}{x_1 \cdots x_n}\cdot$$
(1) Montrer que f est convexe.
(2) Montrer que f possède un minimum global et calculer ce minimum.

Exercice 23. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Mx, x\rangle - \langle a, x\rangle\,.$$
(1) Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si la matrice M est positive.
(2) On suppose que M est définie positive. Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point, et déterminer ce point

Exercice 24. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, et soient $a, b, c > 0$. Déterminer le maximum sur Σ de la fonction $(x,y,z) \mapsto ax + by + cz$.

Exercice 25. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ e^x + e^y + e^z = 1\}$, et soient $a, b, c > 0$. Déterminer le maximum sur Σ de la fonction $(x,y,z) \mapsto ax + by + cz$.

Exercice 26. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z = 1 \text{ et } x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Déterminer le maximum et le minimum sur Σ de la fonction $(x,y,z) \mapsto xyz$.

Exercice 27. Soit $\alpha > 0$ et soit $\Sigma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = \alpha y^2\}$. Soit également $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.

(1) Montrer que le seul point où $f_{|\Sigma_\alpha}$ peut posséder un extremum local est le point $(0,0)$.
(2) Déterminer si $f_{|\Sigma_\alpha}$ possède un maximum local ou un minimum local (ou ni l'un ni l'autre) en $(0,0)$, selon les valeurs de α.

Exercice 28. Soit $p > 0$. Parmi tous les rectangles de périmètre p, quel est celui dont l'aire est maximale?

Exercice 29. On veut construire une boite en carton parallèlépipèdique sans couvercle de volume 4 litres, en utilisant le moins de carton possible. Quelles doivent être les dimensions de la boite?

Exercice 30. Déterminer les dimensions du cylindre à base circulaire d'aire (aire latérale+dessus+dessous) égale à $\sigma = \frac{10\pi}{3}$ dm^2 et de volume maximal.

Exercice 31. Déterminer la distance (euclidienne) du point $a = (5/2, 5/2)$ à l'hyperbole $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

Exercice 32. Soient $a, b > 0$. Montrer qu'il existe un unique rectangle (à côtés parallèles aux axes de coordonnés) d'aire maximale inscrit dans l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 33. (inégalité d'Hadamard)
Dans tout l'exercice, on note E l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.

(1) Justifier l'existence de $M = \max\{\det(u_1, \dots, u_n);\ \|u_1\| = \dots = \|u_n\| = 1\}$.
(2) Dans cette question, on fixe $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que $\|v_i\| = 1$ pour tout i et $\det(v_1, \dots, v_n) = M$.
   (a) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. En appliquant le théorème des extrema liés à la fonction $u \mapsto f(v_1, \dots v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n)$ montrer qu'il existe un nombre réel μ_i tel que
   $$\forall h \in E\ :\ \det(v_1, \dots u_{i-1}, h, v_{i+1} \dots, v_n) = \mu_i \langle v_i, h\rangle\,.$$
   (b) Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée de E.
(3) Quelle est la valeur de M?

(4) Montrer que pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, on a
$$|\det(u_1, \ldots, u_n)| \le \|u_1\| \times \cdots \times \|u_n\| .$$

Exercice 34. (inégalité de Hölder)
Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs, et soit
$$\Sigma = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^q = 1 \right\}.$$
Justifier l'existence de
$$M = \max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma} \sum_{i=1}^n a_i x_i .$$

(2) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ tel que $\sum_1^n a_i x_i = M$.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel μ tel que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ :\ a_i = \mu x_i^{q-1} .$$

(b) Montrer qu'on a $M = \mu$, puis que $x_i^q = \left(\frac{a_i}{M}\right)^p$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) En déduire la valeur de M.

(3) Déduire de (2) que si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels positifs, alors

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q} .$$

(4) Dans cette question, on veut donner une autre démonstration de $(*)$.

(a) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que si $a, b \ge 0$, alors
$$ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q .$$

(b) En déduire que $(*)$ est vraie si $\sum_1^n a_i^p = 1 = \sum_1^n b_i^q$.

(c) Conclure.

Exercice 35. (inégalié arithmético-géométrique)
Dans tout l'exercice, on fixe des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_i > 0$ pour tout i et $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

(1) Soit $\Sigma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \text{ et } \sum_1^n \alpha_i x_i = 1\}$. Justifier l'existence de
$$M = \max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\Sigma} x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n} .$$

(2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ tel que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = M$.
  (a) Montrer que tous les x_i sont strictement positifs.
  (b) Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \; : \; x_i^{\alpha_i - 1} = \frac{\lambda}{\prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j}} \, .$$
  (c) Montrer que tous les x_i sont égaux, puis calculer M.

(3) Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on a
$$(*) \qquad x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \, .$$

(4) Redémontrer $(*)$ en utilisant la concavité de la fonction logarithme.