# Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^2+5y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

(1) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles en tout point.
(2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

**Exercice 3.** (laplacien, fonctions harmoniques)
Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le **laplacien** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est la fonction

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\,.$$

La fonction $f$ est dite **harmonique** si elle vérifie $\Delta f = 0$.

(1) Trouver toutes les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}$.
(2) Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Calculer $\Delta u$ pour $u(x) = \|x\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.
(3) Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction (d'une variable) de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert $I$ contenant $u(\Omega)$, alors

$$\forall x \in \Omega \ : \ \Delta(\varphi \circ u)(x) = \varphi''(u(x))\|\nabla u(x)\|^2 + \varphi'(u(x))\Delta u(x)\,.$$

(4) Soit $\varphi : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \varphi(\|x\|)$. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si on pose $r = \|x\|$, alors

$$\Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\,\varphi'(r)\,.$$

(5) Trouver toutes les fonctions $f$ harmoniques sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et **radiales**, i.e. telles que $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

**Exercice 4.** (laplacien en coordonnées polaires)
Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on note $\widetilde{f} : ]0,\infty[ \times \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\widetilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

On *rappelle* (cf un exercice de la feuille 4) que pour toute fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$, on a les formules suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{\partial f}}{\partial x} & = \cos\theta \, \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \, \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\widetilde{\partial f}}{\partial y} & = \sin\theta \, \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \, \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} \end{cases}$$

Montrer que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\widetilde{\Delta f} = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \theta^2} \cdot$$

**Exercice 5.** Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on note $f_M$ la fonction définie par $f_M(x) = f(Mx)$.

(1) Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \Delta f_M(x) = \sum_{i,k=1}^{n} \langle L_i, L_k \rangle \, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(Mx) \, ,$$

où $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de la matrice $M$ et $\langle \ , \ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

(2) Que devient cette formule lorsque $M$ est une matrice orthogonale?

**Exercice 6.** (harmonicité et propriété de la moyenne)
Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. D'autre part, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $e_\theta$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $e_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(H1) $f$ est harmonique, i.e. $\Delta f = 0$.
(H2) $\forall p \in \mathbb{R}^2 \ \forall r > 0 \ : \ f(p) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$

(1) Soit $p \in \mathbb{R}^2$ fixé.
  (a) Montrer qu'on a $\int_0^{2\pi} Df(p)e_\theta \, d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi} D^2 f(p)(e_\theta, e_\theta) \, d\theta = \pi \, \Delta f(p)$.
  (b) En déduire que lorsque $r$ tend vers 0, on a

$$\int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \, d\theta = 2\pi f(p) + \frac{\pi r^2}{2} \, \Delta f(p) + o(r^2) \, .$$

  (c) Montrer que (H2) entraîne (H1).

(2) Soit à nouveau $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(p + re_\theta) \, d\theta.$$

(a) On pose $\widetilde{f}(r,\theta) = f(p + re_\theta) = f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$. Exprimer $\varphi'(r)$ et $\varphi''(r)$ à l'aide des dérivées partielles de $\widetilde{f}$.

(b) En utilisant la formule pour le laplacien en coordonnées polaires (exercice 4), montrer qu'on a

$$\int_0^{2\pi} \Delta f(p + re_\theta)\, d\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Big(r\varphi'(r)\Big).$$

(c) Montrer que (H1) entraîne (H2).

**Exercice 7.** Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

(1) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $g = \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(u,uv)$.

(a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide de $g$.

(b) Pour $(u,v) \in \Omega$, exprimer $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)$ à l'aide des dérivées partielles de $f$ et de $(x,y) = (u,uv)$.

(2) Déterminer les solutions de (E).

**Exercice 8.** (équation des ondes)
Soit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

(1) Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Montrer qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie $a\frac{\partial g}{\partial x} + b\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si et seulement si elle est de la forme $g(x,y) = \varphi(-bx + ay)$, où $\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. (*Pour le sens "non évident", on pourra considérer la fonction $\widetilde{g}$ définie par $\widetilde{g}(u,v) = g(av - bu, bv + au)$ et calculer $\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial v}$*).

(2) Soit $f$ une solution de (E). Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = \frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y}$ soit de la forme $g(x,y) = \varphi(y + cx)$.

(3) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \varphi(y+cx)$.

(a) On pose $f_0(x,y) = \frac{1}{2c}\int_0^{y+cx}\varphi(s)\,ds$. Calculer $\frac{\partial f_0}{\partial x} + c\frac{\partial f_0}{\partial y}$.

(b) Déterminer toutes les solutions $\mathcal{C}^1$ de l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} = g$.

(4) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme $f(x,y) = u(y - cx) + v(y + cx)$, où $u$ et $v$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 9.** (équation de la chaleur)
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes. Soit également $\Omega = ]0,\infty[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{inx} .$$

Justifier la définition, puis montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$ et vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 .$$

**Exercice 10.** (champs gradients; lemme de Poincaré)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un **champ de vecteurs** sur $\Omega$ est une application $V : \Omega \to \mathbb{R}^2$, qu'on notera toujours

$$V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix} .$$

On dit qu'un champ de vecteurs $V$ sur $\Omega$ est un **champ gradient** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = V$.

(1) Soit $V$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$. Montrer que si $V$ est un champ gradient, alors on doit avoir

$$(*) \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \ : \ \partial_j v_i = \partial_i v_j .$$

(2) On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $V$ est un champ gradient sur $\Omega$, alors on a

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = 0$$

pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(b) = \gamma(a)$.

(3) Dans cette question, on prend $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on définit $V$ sur $\Omega$ par

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} .$$

Montrer $V$ vérifie $(*)$ mais n'est pas un champ gradient.

(4) Dans cette question, on suppose que l'ouvert $\Omega$ est **étoilé** par rapport à un certain point $p$, ce qui signifie qu'on a $[p,x] \subset \Omega$ pour tout $x \in \Omega$. Soit $V$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ et vérifiant $(*)$.

(a) On écrit $p = (p_1,\dots,p_n)$ et on définit une fonction $\Phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(t,x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i)\, v_i(p + t(x-p)) .$$

Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t,x) = v_j(p + t(x-p)) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\Big[v_j(p+t(x-p))\Big] .$$

(b) En déduire que pour $x \in \Omega$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$v_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(t,x)\,dt .$$

(c) Conclure que $V$ est un champ gradient.

**Exercice 11.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x,y)$ par une formule intégrale, puis montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 12.** Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^x \cos(3x+2y)$.

**Exercice 13.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0,0) = 0$ et $Df(0,0) = 0$.

(1) En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe trois fonctions continues $a, b, c$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = x^2 a(x,y) + xy\,b(x,y) + y^2 c(x,y) .$$

(2) Exprimer $a(0,0)$, $b(0,0)$ et $c(0,0)$ à l'aide des dérivées partielles secondes de $f$ en $(0,0)$.

(3) On suppose que la matrice hessienne $H_f(0,0)$ vérifie $\det H_f(0,0) < 0$, et qu'on a de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$.

(a) Pourquoi existe-t-il un voisinage $W$ de $(0,0)$ tel que $a(x,y) > 0$ et $b(x,y)^2 > 4a(x,y)c(x,y)$ pour tout $(x,y) \in W$?

(b) Montrer qu'il existe deux fonctions $u$ et $v$ continues sur $W$ telles que $u(0,0) = 0 = v(0,0)$ et

$$\forall (x,y) \in W \ : \ f(x,y) = u(x,y)^2 - v(x,y)^2.$$