Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soient E et F deux evn, et soit $f : E \to F$. On suppose qu'on a $f(h) = O(\|h\|^\alpha)$ au voisinage de 0, pour un certain $\alpha > 1$. Montrer que f est différentiable en 0.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn dont la norme dérive d'un produit scalaire, noté $\langle\, , \rangle$. On note $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \|x\|^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
(2) Montrer f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3. Soit E un evn, et soit $f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $f(X) = X^2$.

(1) Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$, et trouver sa différentielle.
(2) En observant que l'application $Df : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ est linéaire, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ouvert de $\mathcal{L}(E)$ constitué par les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est différentiable sur $GL(E)$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 5. Soient E, F_1, F_2, G des evn, $u : E \to F_1$, $v : E \to F_2$ et $B : F_1 \times F_2 \to G$ bilinéaire continue. On définit $f : E \to G$ par $f(x) = B(u(x), v(x))$. Enfin, soit $a \in E$. On suppose que u est différentiable en a avec $Du(a) = 0$, et que v est continue en a. Montrer que f est différentiable en a avec $Df(a) = 0$.

Exercice 6. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $f : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par $f(u) = \varphi \circ u$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{C}([0,1])$ et que pour $u, h \in \mathcal{C}([0,1])$, on a $Df(u)h = (\varphi' \circ u) \times h$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la fonction $x \mapsto \|x\|$ n'est dérivable en 0 dans aucune direction.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$ et $f(x, x^2) = 1$ pour tout $x \neq 0$.

(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
(2) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions.

Exercice 9. Soit E et F deux evn, et soit $f : E \to F$. On suppose que f admet en un point $p \in E$ une dérivée dans la direction d'un vecteur $e \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\partial_{\lambda e} f(p)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et qu'on a $\partial_{\lambda e} f(p) = \lambda \partial_e f(p)$.

Exercice 10. Montrer que la formule $g(x, y) = xy + x\sqrt{2 - y^2}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à préciser.

Exercice 11. Écrire les matrices Jacobiennes des applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y, z) = (xy\cos(y^3 z), e^{z^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2})$ et $g(x, y) = (x^3 \log(3 + x^4 y^4), e^{\sqrt{1+x^2y^2}})$.

Exercice 12. Étudier la différentiabilité de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0, 0) = 0$ et $f(x, y, z) = xyz \log(x^2 + y^2 + z^2)$ si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Exercice 13. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p + q > 3$.

Exercice 14. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x, y) = |xy|^\alpha$.

(1) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0, y \neq 0\}$.
(2) Montrer que f_α est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
(3) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 15. Pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(0, 0) = 0$ et $f_\alpha(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

(1) Montrer que f_α possède des dérivées partielles en tout point et calculer ces dérivées partielles.
(2) Montrer que si $\alpha < 1/2$, alors f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
(3) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy \arctan\left(\frac{y}{|x|}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$.

(1) Montrer que f possède des dérivées partielles en tout point $(0, y)$ et calculer ces dérivées partielles.
(2) Déterminer les points de différentiabilité de f.

Exercice 17. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(0, y) = (0, 0)$ et $f(x, y) = \big(\sqrt{y}\, x^2 \cos(1/x^3), \sqrt{y}\, x^2 \sin(1/x^3)\big)$ si $x \neq 0$.

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega^* = \{(x,y) \in \Omega;\ x \neq 0\}$.
(2) Montrer que si $a = (0, y_0) \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{R}^2$ vérifie $a + h \in \Omega$, alors
$$\|f(a+h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty^2 \sqrt{y_0 + \|h\|_\infty}\,.$$
En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec $Df(x,y) = 0$ si $x = 0$.
(3) Montrer que le déterminant Jacobien $J_f(x,y) = \det(\mathrm{Jac}_f(x,y))$ prend exactement deux valeurs sur Ω.

Exercice 18. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et déterminer son gradient.

Exercice 19. Soit $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $I(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$, et que si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifie $\|a\| = 1$, alors $DI(a)$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à a.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point, et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.