Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable. On suppose que la fonction $t \mapsto \|\gamma(t)\|_2$ est constante. Montrer que $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\gamma(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Donner une formule pour la dérivée de $\varphi(t) = M(t)^3$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit F un evn et soit $\varphi : [0,+\infty[\to F$ une fonction dérivable.

(1) Montrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $t \geq A$, on a
$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(A)\| + (t-A) \sup_{s \geq A} \|\varphi'(s)\|\,.$$

(2) Montrer que si on a $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = 0$.

Exercice 5. Soit F un evn et soit $\varphi : [0,\infty[\to F$ une fonction continue, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,\infty[$. On suppose que $\varphi'(t)$ admet une limite $\xi \in F$ quand $t \to 0^+$.

(1) Montrer que pour tout $t > 0$, on peut trouver $c_t \in]0,t[$ tel que
$$\|\varphi(t) - \varphi(0) - t\xi\| \leq t\,\|\varphi'(c_t) - \xi\|.$$

(2) Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \xi$.

Exercice 6. (une autre preuve de l'inégalité des AF)
Soit $\varphi : [a,b] \to F$ une fonction dérivable telle que $\|\varphi'(t)\| \leq M$ sur $[a,b]$. Le but de l'exercice de montrer qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M(b-a)$ en utilisant une méthode différente de celle vue en cours pour démontrer l'inégalité des accroissements finis.

(1) Soit $K > M$ fixé. On pose $J_K = \{t \in [a,b];\ \|\varphi(t) - \varphi(a)\| \leq K\,(t-a)\}$.
   - (a) Montrer que si $t \in [a,b[$, alors $\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\| \leq K\,h$ pour tout $h > 0$ assez petit.
   - (b) En déduire que si $t \in J_K$ et $t < b$, alors on peut trouver un point $s \in J_K$ avec $s > t$.
   - (c) En considérant $t_0 = \sup J_K$, montrer que $b \in J_K$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 7. (inégalité des accroissements finis "généralisée")
Soient F un espace vectoriel normé, $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $\varphi : [a, b] \to F$ et $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que φ est dérivable sur $]a, b[$ et qu'on a

$$\forall t \in]a, b[: \; \|\varphi'(t)\| \leq \rho(t) .$$

(1) On pose $R(t) = \int_a^t \rho(s)\, ds$. Montrer que si $\Theta \in F^*$ vérifie $\|\Theta\| \leq 1$, alors la fonction $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = \Theta(\varphi(t)) - R(t)$ est décroissante sur $[a, b]$. En particulier, on a $\psi(b) - \psi(a) \leq 0$.
(2) En utilisant le lemme de scalarisation, déduire de (1) qu'on a

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq \int_a^b \rho(t)\, dt.$$

(3) Redémontrer en 3 lignes le résultat de (2) lorsque φ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ et que F est complet.

Exercice 8. Soient F un espace de Banach et soit $\varphi : [0, \infty[\to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante k telle que $\|\varphi'(t)\| \leq k \|\varphi(t)\|$ pour tout $t \geq 0$.

(1) On pose $a = \|\varphi(0)\|$ et $u(t) = \|\varphi(t)\|$. Montrer qu'on a $u(t) \leq a + k \int_0^t u(s)\, ds$ pour tout $t \geq 0$.
(2) On pose maintenant $v(t) = a + k \int_0^t u(s)\, ds$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-kt} v(t)$ est décroissante sur $[0, \infty[$.
(3) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\|\, e^{kt}$.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, quelle est la dérivée de l'application $p_k : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $p_k(t) = t^k A^k$?
(2) Montrer que l'application $t \mapsto e^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'on a

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} \cdot$$

Exercice 10. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$.

(1) Montrer que A et B commutent avec e^{tA}, e^{tB} et $e^{t(A+B)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(2) En utilisant (1) et l'exercice 9, montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(t) = e^{t(A+B)} e^{-tA} e^{-tB}$ est constante.
(3) Montrer qu'on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 11. (groupes à un paramètres)
Soit $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $\Phi(0) = I$ et $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R} \; : \; \Phi(t) = e^{tA}$

(1) Quelle est la limite de $\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \Phi(s)\,ds$ quand δ tend vers 0^+?
(2) Déduire de (1) qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que la matrice $M(\delta) = \int_0^\delta \Phi(s)\,ds$ est inversible.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\int_t^{t+\delta} \Phi(u)\,du = M(\delta)\Phi(t)$, et en déduire que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(4) Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(5) En considérant $\Psi(t) = e^{-tA}\Phi(t)$, montrer qu'on a $\Phi(t) = e^{tA}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : [a, b] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\varphi'(a) = 0 = \varphi'(b)$. On pose $M = \sup_{s\in[a,b]} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Pour $t \in [a, b]$, majorer $\|\varphi(t) - \varphi(a)\|$ et $\|\varphi(t) - \varphi(b)\|$ à l'aide de M.
(2) En déduire qu'on a $\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq M\,\frac{(b-a)^2}{4}\cdot$

Exercice 13. Soit F un espace de Banach, soit $a > 0$ et soit $\varphi : [-a, a] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $M = \sup_{s\in[-a,a]} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Soit $t \in [-a, a]$. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $\varphi(a) - \varphi(t)$ et $\varphi(-a) - \varphi(t)$.
(2) Montrer que pour tout $t \in [-a, a]$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{\|\varphi(a) - \varphi(-a)\|}{2a} + M\,\frac{a^2 + t^2}{2a}\cdot$$

Exercice 14. Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : \mathbb{R} \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que φ et φ'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup_{s\in\mathbb{R}} \|\varphi(s)\|$ et $M_2 = \sup_{s\in\mathbb{R}} \|\varphi''(s)\|$.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Majorer $\|\varphi(t + h) - \varphi(t) - h\varphi'(t)\|$ à l'aide de M_2 pour tout $h \in \mathbb{R}$, et en déduire que pour tout $h > 0$, on a

$$\|\varphi'(t)\| \leq \frac{M_2}{2}\,h + \frac{2M_0}{h}\cdot$$

(2) Montrer qu'on a $\|\varphi'(t)\| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$. On note $Z(f)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\; f(x) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *la fonction $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f'' s'annule en tout point de $Z(f)$.*

(1) Pourquoi g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\backslash Z(f)$?

(2) Si $x_0 \in Z(f)$, quelle est la valeur de $f'(x_0)$?

(3) Soit $x_0 \in Z(f)$. A l'aide d'un développement limité, montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$, et qu'on a alors $g'(x_0) = 0$.

(4) Soit $x_0 \in Z(f)$ tel que $f''(x_0) = 0$. Soit également $\alpha > 0$. On pose $I_\alpha = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ et $M_\alpha = \sup\{|f''(t)|;\ |t - x_0| \leq 2\alpha\}$.

(a) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que si $x \in I_\alpha$, alors

$$\forall h \in [-\alpha, \alpha] \qquad \frac{M_\alpha}{2}\, h^2 + f'(x)h + f(x) \geq 0\ .$$

(b) On suppose $M_\alpha > 0$. En utilisant (2) et l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour $x \in I_\alpha$ fixé, le point où le polynôme du second degré $\frac{M_\alpha}{2} h^2 + f'(x)h + f(x)$ atteint son minimum appartient à l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$.

(c) Déduire de (a) et (b) que si $x \in I_\alpha$, alors $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_\alpha f(x)}$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 16. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(0) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'on peut écrire $\varphi(t) = t\,\psi(t)$, où ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi : [0, \varepsilon] \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, où F est un espace de Banach. On suppose qu'on a $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ et $\|\varphi'''(t)\| \leq 1 + t^2$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. Montrer que $\|\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)\| \leq \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon^5}{60}$.

Exercice 18. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, où F est un espace de Banach. On suppose qu'il existe une constante C et une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telles que $\|\varphi^{(k)}(t)\| \leq C^k k!\, \alpha(t)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout t. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}[$, on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, \varphi^{(n)}(0)\,,$$

où la série converge dans F.