Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\|u\|_\infty \le \|u\|_2 \le \sqrt{n}\,\|u\|_\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le \|u\|_1$.

Exercice 2. Pour $u \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt$.

(1) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$.
(2) Pour $k \ge 2$, on note $u_k \in \mathcal{C}([0,1])$ la fonction nulle sur les intervalles $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{k}]$ et $[\frac{1}{2} + \frac{1}{k}, 1]$, valant k en $\frac{1}{2}$ et affine sur les intervalles $[\frac{1}{2} - \frac{1}{k}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{k}]$. Calculer $\|u_k\|_1$.
(3) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1])$ sont elles équivalentes?

Exercice 3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $u_k \in \mathcal{C}([0,1])$ la fonction nulle sur les intervalles $[0, 1/(2k+1)]$ et $[1/(2k-1), 1]$, valant 1 au point $t = 1/2k$, et affine sur les intervalles $[1/(2k-1), 1/2k]$ et $[1/2k, 1/(2k+1)]$.

(1) Montrer que la suite (u_k) est bornée dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.
(2) Calculer $\|u_q - u_p\|_\infty$ pour $p < q$.
(3) Montrer que (u_k) ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 4. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Montrer qu'il n'est pas possible de prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(0,0) = 0$ et $f_\alpha(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie l en $\pm\infty$. On définit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = (x+y) f\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $g(x,0) = lx$.

(1) Pourquoi g est-elle continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$?
(2) Montrer que g est continue en tout point $(a,0)$, $a \neq 0$.

(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que g est également continue en $(0,0)$.

Exercice 8. Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 3y^4 \leq 6\}$ Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Donner un exemple de partie fermée bornée de $\mathcal{C}([0,1])$ qui ne soit pas compacte.

Exercice 10. Soit $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout compact de Ω.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Montrer que la série $\sum_k e^{-kf(x)}$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Soient I et $[a,b]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $\Phi : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(1) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de I convergeant vers un point $x \in I$. On pose $K = \{x\} \cup \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Pourquoi la fonction Φ est-elle uniformément continue sur $K \times [a,b]$?

(2) Pour $x \in I$, on note $\Phi_x : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\Phi_x(t) = \Phi(x,t)$. Montrer que l'application $x \mapsto \Phi_x$ est continue de I dans $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 13. Soit E un evn. Montrer que si $(u_k) \subset E$ est une suite de Cauchy possédant une sous-suite convergente, alors (u_k) est convergente.

Exercice 14. Soit E un evn. On suppose que toute série normalement convergente à termes dans E est convergente. Le but de l'exercice est de montrer que E est complet.

(1) Soit (u_k) une suite de Cauchy dans E. Montrer que (u_k) possède une sous-suite (v_k) telle que $\|v_{k+1} - v_k\| \leq 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Conclure en utilisant l'exercice 13.

Exercice 15. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constituée par toutes les suites de nombres réels $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x(j)$ est absolument convergente. Pour $u = (x(j)) \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |x(j)|\,.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 16. Soient E et F deux evn, et soit $L : E \to F$ une application continue et *additive*, c'est-à-dire vérifiant $L(u+v) = L(u) + L(v)$ pour tous $u, v \in E$.

(1) Montrer qu'on a $L(nu) = nL(u)$ pour tout $u \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que $L(ru) = rL(u)$ pour tout u et pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que L est linéaire.

Exercice 17. Soit E et F deux evn, avec F complet. Soit également $f : E \to F$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\|f(u+v) - f(u) - f(v)\| \leq C$$

pour tous $u, v \in E$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que $\|L(u) - f(u)\| \leq C$ pour tout $u \in E$.

(1) Soit $u \in E$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\| \frac{f(2^k u)}{2^k} - \frac{f(2^{k-1}u)}{2^{k-1}} \right\| \leq \frac{C}{2^k} \cdot$
(2) Montrer que pour tout $u \in E$, la suite $\left(\frac{f(2^k u)}{2^k} \right)_{k \geq 1}$ converge dans F, et que la convergence est uniforme par rapport à u.
(3) On définit une application $L : E \to F$ en posant

$$L(u) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(2^k u)}{2^k} \,.$$

Montrer que L convient en utilisant l'exercice 16.

Exercice 18. Soit $v \in \mathcal{C}([0,1])$. Montrer que l'application $u \mapsto \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercice 19. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Exercice 20. Montrer que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{M^k}{k!}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$. La somme de cette série s'appelle l'**exponentielle** de la matrice M et se note e^M : on a donc par définition

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \cdot$$

Exercice 21. Dans tout l'exercice, E est un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments *inversibles* de $\mathcal{L}(E)$, autrement dit l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(E)$ qui sont bijectives et telles que l'application linéaire L^{-1} est continue.

(1) Montrer que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors la série $\sum H^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$. En déduire que $Id - H \in GL(E)$, avec de plus $\|(Id-H)^{-1}\| \leq 1/(1-\|H\|)$.
(2) Montrer que si $A \in GL(E)$ et si $L \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|L - A\| \leq 1/2\|A^{-1}\|$, alors $L \in GL(E)$ et $\|L^{-1}\| \leq 2\,\|A^{-1}\|$. (*Écrire* $L = A(Id - H)$).
(3) Montrer que si $A, L \in GL(E)$, alors $L^{-1} - A^{-1} = L^{-1}(A-L)A^{-1}$.
(4) Déduire de (2) et (3) que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $L \mapsto L^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 22. Montrer en quelques lignes (et sans utiliser l'exercice 21) que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 23. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Exercice 24. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 25. (preuve du "lemme de scalarisation" en dimension finie)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie, et soit $a \in E \setminus \{0\}$ fixé. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire (continue) $\Theta \in E^*$ telle que $\|\Theta\| \leq 1$ et $\Theta(a) = \|u\|$.

(1) Soit $F_1 = \mathbb{R}a$. On définit une forme linéaire $\Phi_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ par $\Phi_1(\lambda a) = \|a\|\,\lambda$. Montrer qu'on a $\|\Phi_1\| = 1$ et $\Phi_1(a) = \|u\|$.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant a, avec $F \neq E$, et soit $e \in E \setminus F$. Soit également $\Phi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant $\|\Phi\| \leq 1$.
   (a) Montrer que pour tous $v, w \in F$, on a
   $$\Phi(v) - \|v - e\| \leq \|w + e\| - \Phi(w)\,.$$
   (b) En déduire qu'il existe un nombre réel c tel que
   $$\forall v, w \in F \ : \ \Phi(v) - \|v - e\| \leq c \leq \|w + e\| - \Phi(w)\,.$$
   (c) Montrer que pour tout $u \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\Phi(u) + c\lambda \leq \|u + \lambda e\|\,.$$
   (d) En déduire qu'il existe une forme linéaire $\Phi' : F \oplus \mathbb{R}e \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi' \equiv \Phi$ sur F et $\|\Phi'\| \leq 1$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.