Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 9 Janvier 2013

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soient E, F, G trois evn. Montrer que toute application bilinéaire continue $B : E \times F \to G$ est différentiable.

(2) Soit E, F des evn, et soit $f : E \to F$ différentiable. On suppose qu'on a $\|f(a)\| \leq 6$ pour tout $a \in E$ vérifiant $\|a\| = 1$, et $\|Df(\xi)\| \leq 8$ pour tout $\xi \in E$ vérifiant $\|\xi\| \geq 1$.

(a) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| > 1$, et soit $a = \frac{x}{\|x\|}\cdot$ Montrer qu'on a $\|\xi\| \geq 1$ pour tout $\xi \in [a, x]$.

(b) En utilisant convenablement l'inégalité des accroissements finis, montrer que si $x \in E$ vérifie $\|x\| > 1$, alors $\|f(x)\| \leq 8\,\|x\| + 14$.

(3) Montrer que la formule

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)\cos(n^2 y)}{n^4}$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe des fonctions continues $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, (pour $i, j = 1, \ldots, n$) telles que

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)\, x_j + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, x_i x_j \,.$$

(5) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{2x-3y}\cos(x + 2y)$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$.

(6) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 3z^2 - 2z$.

(7) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $\varphi''(t) \geq -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \varphi(x + y)$ est convexe.

(8) Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\Phi(x,y,z) = (e^x \cos y, e^x \sin y, z + z^3)$. Montrer que Φ est un difféomorphisme local en tout point.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\text{(E)} \qquad 4\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 5\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,.$$

(1) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on note $f^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f^*(u,v) = f\left(\frac{4}{3}\,v - \frac{4}{3}\,u, \frac{4}{3}\,v - \frac{1}{3}\,u\right).$$

Exprimer $f(x,y)$ à l'aide de f^*.

(2) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si f^* est solution de

$$\text{(E}^*\text{)} \qquad \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v}(u,v) - \frac{1}{3}\frac{\partial f^*}{\partial v}(u,v) = -\frac{8}{9}\cdot$$

(3) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(u,v) = e^{-\frac{1}{3}u}\, g(u,v)\,.$$

Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ à l'aide des dérivées partielles de g.

(4) Déduire des questions précédentes que les solutions de de (E) sont exactement les fonctions f de la forme

$$f(x,y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + e^{\frac{y-x}{3}}\left(\Phi(y-x) + \Psi\left(y - \frac{x}{4}\right)\right)\,,$$

où Φ et Ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiable. On suppose que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. Le but de l'exercice est de montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

(1) Soit B un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{B} \subset \Omega$, et soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable. On suppose qu'il existe un point $a \in B$ tel que $\forall \xi \in \partial B \;:\; \varphi(a) < \varphi(\xi)$. Montrer qu'il existe un point $u \in B$ tel que $d\varphi(u) = 0$.

(2) Soit $a \in \Omega$ quelconque.

 (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n \;:\; \|Df(a)h\| \geq \varepsilon\,\|h\|\,.$

 (b) Montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(a,\delta) \subset \Omega$ et

$$\forall \xi \in \overline{B}(a,\delta) \;:\; \|f(\xi) - f(a)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\,\|\xi - a\|\,.$$

(c) Soit $v \in B(f(a), \delta\varepsilon/4)$. En appliquant (1), à $\varphi(x) = \|f(x)-v\|^2$, montrer qu'il existe un point $u \in B(a, \delta)$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle Df(u)h, f(u) - v \rangle = 0\,.$$

(d) Montrer que $B(f(a), \delta\varepsilon/4) \subset f(B(a, \delta))$.

(3) Conclure.