Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Calcul Différentiel 1*

Examen du 10 Juin 2013

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, et soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels non nuls telle que $\lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = +\infty$. Montrer que la série $\sum \frac{\sin(k\sqrt{2})}{(\alpha_k)^k} A^k B^k$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Soit F un espace de Banach et soit $\varphi : [0, \infty[\to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'on a $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et $\|\varphi''(t)\| \leq e^{-3t}$ pour tout $t \in [0, \infty[$. Montrer que $\|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3x}$ pour tout $x \geq 0$.

(3) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p + q > 3$.

(4) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = g(3x-2y+z, 4x-3y+5z)$. Montrer que f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$7\,\frac{\partial f}{\partial x} + 11\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

(5) Soit E un espace vectoriel normé, et soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = B(x,x)^3$ est différentiable sur E, et déterminer sa différentielle.

(6) Montrer que pour tout $\delta > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+\delta t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et si $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels, alors la formule

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan\left(\alpha_n\, g(x,y)\right)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(7) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0,0) = 0$ et $Df(0,0) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe trois fonctions continues a, b, c sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = x^2 a(x,y) + xy\, b(x,y) + y^2 c(x,y)\,.$$

(8) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 + x + 2y > 0\}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(3x+y)\ln(1+x+2y)$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f en $(0,0)$.

(9) Soit $u :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ décroissante vérifiant $u'(t) + 2tu''(t) \geq 0$ pour tout $t > 0$. On pose $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0\}$ et on définit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = u(xy)$. Montrer que f est convexe.

(10) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$.

(11) Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. En utilisant le théorème des extrema liés, déterminer le maximum sur Σ de la fonction $(x,y,z) \mapsto x+y+z$.

(12) Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = (e^{x^2-y^2}\cos(xy), e^{x^2-y^2}\sin(xy))$. Montrer que Φ est un difféomorphisme local en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé. On rappelle qu'une application linéaire continue $L : E \to E$ est dite *inversible* si elle est bijective et si L^{-1} est continue.

(1) Montrer que si $L \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall h \in E \ : \ \|L(h)\| \geq \alpha \|h\|\,.$$

(2) Soit $f : E \to E$ une application différentiable en un point $a \in E$. On suppose que $Df(a)$ est inversible. Montrer qu'on peut trouver une boule ouverte $B(a,\delta)$ (avec $\delta > 0$) et une constante $c > 0$ telles que

$$\forall x \in B(a,\delta) \ : \ \|f(x) - f(a)\| \geq c\, \|x - a\|\,.$$

Exercice 2. Soit $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $I(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

(1) Justifier que I est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) On note $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$DI(x)h = \frac{1}{\|x\|^2}\, h - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}\, x\,.$$

(3) Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\|a\| = 1$, alors $DI(a)$ est une symétrie orthogonale.

Exercice 3. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \to F$ une application différentiable.

(1) Pour $R > 0$, on pose $\varepsilon(R) = \sup\{\|Df(\xi)\|;\ \|\xi\| \geq R\}$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si $x \in E$ vérifie $\|x\| \geq R$ et si on pose $\pi_R(x) = R\frac{x}{\|x\|}$, alors
$$\|f(x)\| \leq \|f(\pi_R(x))\| + \varepsilon(R)\,\|x - \pi_R(x)\|\,.$$

(2) On suppose que f est bornée sur tout partie bornée de E et qu'on a
$$\lim_{\|\xi\|\to\infty} \|Df(\xi)\| = 0\,.$$
Montrer que
$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0\,.$$

Exercice 4. Dans tout l'exercice, on fixe des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_i > 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

(1) Soit $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ et } \sum_1^n \alpha_i x_i = 1\}$. Justifier l'existence de
$$M = \max_{(x_1,\dots,x_n)\in\Sigma} x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n}\,.$$

(2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma$ tel que $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = M$.

(a) Montrer que tous les x_i sont strictement positifs.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ :\ x_i^{\alpha_i - 1} = \frac{\lambda}{\prod\limits_{j\neq i} x_j^{\alpha_j}}\,.$$

(c) Montrer que tous les x_i sont égaux, puis calculer M.

(3) Déduire de (2) que pour tous $x_1, \dots, x_n \geq 0$, on a l'inégalité suivante (qu'on appelle l'*inégalité arithmético-géométrique*) :
$$\text{(AG)} \qquad x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\,.$$

(4) Redémontrer (AG) en utilisant la concavité de la fonction logarithme.