

## Feuille d'exercices n° 5

**Exercice 1.** (prolongement de  $\zeta$ )(1) Montrer que si  $s \in \mathbb{C}$  et  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , alors

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt.$$

(2) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , la formule  $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .(3) Soit  $n \geq 1$ , et soit  $s \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\operatorname{Re}(s) \geq -1$ .(a) En considérant la fonction  $\psi$  définie par  $\psi(t) = \frac{1}{t^s}$ , montrer que

$$\forall t \in [n, n+1] : \left| \frac{1}{t^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}.$$

(b) En déduire une majoration pour  $|\varphi_n(s)|$ .(4) Montrer que la fonction  $\zeta$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\Omega \setminus \{1\}$ , où  $\Omega = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$ .**Exercice 2.** (prolongement de  $\Gamma$ )(1) Montrer que si  $z \in \mathbb{C}$  vérifie  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , alors

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(2) Montrer que la formule  $\Phi(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .(3) Montrer que la fonction  $\Gamma$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .**Exercice 3.** (transformée de Fourier de la Gaussienne)Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on définit sa **transformée de Fourier**  $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par la formule

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la transformée de Fourier de la fonction  $\mathbf{g}$  définie par  $\mathbf{g}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

- (1) Montrer que la formule  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t) e^{-itz} dt$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .
- (2) Calculer  $\Phi(iy)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .
- (3) Dédire de (1) et (2) qu'on a  $\widehat{\mathbf{g}} = \sqrt{2\pi} \mathbf{g}$ .

**Exercice 4.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

- (1) On suppose que  $f$  est bornée et à support compact. Montrer que sa transformée de Fourier  $\widehat{f}$  se prolonge de manière unique en une fonction  $\Phi$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , et donner une expression intégrale pour les dérivées de  $\Phi$  en 0.
- (2) On suppose que  $f$  est continue à support compact, et que  $\widehat{f}$  est également à support compact.
  - (a) Montrer que  $\Phi = 0$ .
  - (b) En déduire qu'on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P(t) dt = 0$  pour tout polynôme  $P$ .
  - (c) Montrer que  $f = 0$ .

**Exercice 5.** (injectivité de la transformation de Fourier)

Dans tout l'exercice,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $\widehat{f}$  sa transformée de Fourier.

- (1) Soit  $a \in \mathbb{R}$  fixé. On note  $U$  le demi-plan  $\{\text{Im}(z) > 0\}$ , et pour  $z \in \overline{U}$ , on pose

$$F_a(z) = \int_{-\infty}^a f(t) e^{-iz(t-a)} dt .$$

- (a) Montrer que  $F_a$  est bien définie, continue bornée sur  $\overline{U}$  et holomorphe sur  $U$ .
- (b) Déterminer  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F_a(iy)$ .
- (2) On suppose qu'on a  $\widehat{f}(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et on fixe  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Montrer qu'on a  $F_a(x) = -\int_a^{+\infty} f(t) e^{-ix(t-a)} dt$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
  - (b) En déduire que  $F_a$  se prolonge en une fonction entière bornée.
  - (c) Montrer qu'on a  $\int_{-\infty}^a f(t) dt = 0$ .
- (3) On suppose  $f$  continue. Montrer que si  $\widehat{f} = 0$ , alors  $f = 0$ .

**Exercice 6.** (transformée de Laplace)

Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On suppose que l'intégrale  $\int_0^\infty f(t) dt$  existe, au sens où  $\int_0^X f(t) dt$  admet une limite dans  $\mathbb{C}$  quand  $X \rightarrow \infty$ . On ne suppose pas que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C}; \text{Re}(s) > 0\} .$$

- (1) Pour  $x \geq 0$ , on pose  $F(x) = \int_x^\infty f(t) dt$ . Quelle est la limite de  $F(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ?

- (2) En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante  $M < \infty$  telle que : pour tous  $A, B$  tels que  $0 < A < B$  et pour tout  $s \in \Omega$ , on a

$$\left| \int_A^B f(t)e^{-st} dt \right| \leq |F(B)| + |F(A)| + M \frac{|s|}{\operatorname{Re}(s)} e^{-\operatorname{Re}(s)A}.$$

- (3) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $L_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  par  $L_n(s) = \int_0^n f(t)e^{-st} dt$ . Montrer que  $L_n$  est holomorphe sur  $\Omega$ .  
 (4) Dédire de (2) et (3) que la formule

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

a un sens pour tout  $s \in \Omega$ , et que la fonction  $\mathcal{L}f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .

**Exercice 7.** (inégalité de Hölder)

Dans tout l'exercice,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$  sont des fonctions mesurables strictement positives sur  $I$ .

- (1) On note  $V$  la bande  $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ . Montrer que si  $f$  et  $g$  sont *intégrables* sur  $I$ , alors la formule

$$\Psi(z) = \int_I f(t)^{1-z} g(t)^z dt$$

définit une fonction continue sur  $\overline{V}$  et holomorphe sur  $V$ .

- (2) On suppose que  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $I$ . Pour  $z \in \overline{V}$ , on pose

$$\Phi(z) = \frac{\int_I f(t)^{1-z} g(t)^z dt}{\left(\int_I f(t) dt\right)^{1-z} \left(\int_I g(t) dt\right)^z}.$$

- (a) Montrer que  $\Phi$  est continue sur  $\overline{V}$  et holomorphe sur  $V$ .  
 (b) Montrer que si  $z = x + iy \in \overline{V}$ , alors  $|\Phi(z)| \leq |\Phi(x)|$ . En déduire d'une part que  $\Phi$  est bornée sur  $\overline{V}$ , et d'autre part qu'on a  $|\Phi(\xi)| \leq 1$  pour tout  $\xi \in \partial V$ .  
 (c) Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)e^{\varepsilon z^2}$ .  
 (i) Montrer que  $|\Phi_\varepsilon(z)|$  tend vers 0 quand  $|z| \rightarrow \infty$ , et qu'on a  $|\Phi_\varepsilon(\xi)| \leq e^\varepsilon$  pour tout  $\xi \in \partial V$ .  
 (ii) En déduire, en utilisant le principe du maximum sur des ouverts du type  $]0, 1[\times] - R, R[$ , qu'on a  $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq e^\varepsilon$  pour tout  $z \in V$ .  
 (d) Montrer qu'on a  $|\Phi(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in \overline{V}$ , et conclure que si  $\alpha \in [0, 1]$ , alors

$$\int_I f(t)^{1-\alpha} g(t)^\alpha dt \leq \left(\int_I f(t) dt\right)^{1-\alpha} \left(\int_I g(t) dt\right)^\alpha.$$

- (3) Démontrer l'inégalité de Hölder pour  $f$  et  $g$ .

**Exercice 8.** (formule des compléments)

- (1) En utilisant convenablement la formule de changement de variables, montrer que pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}.$$

- (2) En utilisant un calcul fait en cours, en déduire la formule des compléments : si  $z \in \mathbb{C}$  vérifie  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

**Exercice 9.** Le but de l'exercice est de montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n)^2} = \left( \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2.$$

- (1) Montrer qu'on définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  en posant

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

- (2) Montrer que si  $w = a + ib \in \mathbb{C}$  (où  $a$  et  $b$  sont réels), alors  $|\sin w|^2 \geq \operatorname{sh}^2 b$ .  
 (3) On définit  $\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\Phi(z) = \left( \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 - g(z).$$

- (a) Montrer que la fonction  $\Phi$  est 1-périodique (i.e.  $\Phi(z + 1) = \Phi(z)$ ).  
 (b) Montrer à l'aide d'un développement limité que  $(\pi/\sin(\pi z))^2 - 1/z^2$  admet une limite en 0.  
 (c) En déduire que la fonction  $\Phi$  se prolonge en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et 1-périodique. Dans la suite, on note encore  $\Phi$  cette fonction.  
 (d) Montrer que si  $z = x + iy$  avec  $|y| > 1$  et  $-1/2 \leq x \leq 1/2$ , alors

$$|\Phi(z)| \leq \left( \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi} \right)^2 + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - 1/2)^2}.$$

En déduire que  $\Phi$  est bornée sur la bande  $\{-1/2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1/2\}$ .

- (e) Montrer que la fonction  $\Phi$  est constante.  
 (4) Montrer qu'on a  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(iy) = 0$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\sin(\pi iy)| = +\infty$ .  
 (5) Démontrer la formule souhaitée.

**Exercice 10.** Montrer que pour tout  $\alpha > 1$ , le produit infini  $\prod n^{\frac{1}{n^\alpha}}$  est convergent.

**Exercice 11.** Soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres positifs telle que  $\sum_0^\infty \alpha_n^2 < \infty$ . Montrer que le produit infini  $\prod |1 + i\alpha_n|$  est convergent.

**Exercice 12.** Montrer que le produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$  est convergent, puis déterminer la valeur de  $\prod_2^\infty \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$  en remarquant que  $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$ .

**Exercice 13.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

- (1) Calculer  $u_{2k}u_{2k-1}$  pour tout  $k \geq 1$ .
- (2) Montrer que le produit infini  $\prod u_n$  est convergent et déterminer  $\prod_1^\infty u_n$ .

**Exercice 14.** Soit  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| < 1$ .

- (1) Montrer que les produits infinis  $\prod_{n \geq 1} (1 + z^n)$  et  $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}$  sont convergents.
- (2) Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\prod_{k=1}^{2N} (1 - z^k) = \prod_{n=1}^N (1 - z^n) \times \prod_{n=1}^N (1 - z^{2n-1})(1 + z^n).$$

- (3) En déduire l'identité

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}.$$

**Exercice 15.** Montrer que le produit infini  $\prod_{k \geq 0} (1 + z^{2^k})$  converge normalement sur tout compact du disque unité  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ , et qu'on a

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1 - z}.$$

**Exercice 16.** (théorème de Weierstrass)

Soit  $(\lambda_n)$  une suite de nombres complexes non nuls vérifiant  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty$ . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  dont les zéros sont exactement les  $\lambda_n$ .

- (1) Soit  $\psi$  une fonction entière, et soit  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Montrer que la formule  $\varphi(z) = \int_0^1 w(t)\psi(tz) dt$  définit une fonction entière, et exprimer les coefficients  $a_n$  du développement en série entière de  $\varphi$  en fonction de  $w$  et des dérivées de la fonction  $\psi$  en 0.

- (2) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $\psi(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on peut écrire  $\psi^{(n)}(z) = Q_n(z)\psi(z)$ , où  $Q_n$  est un polynôme à coefficients positifs.

- (3) On pose  $W_0(z) = 1 - z$ , et pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $W_p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$W_p(z) = (1 - z) \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right).$$

- (a) Calculer  $W_p'(z)$  pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{C}$ .  
 (b) En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et les questions précédentes, montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  on peut écrire

$$1 - W_p(z) = z^{p+1} \varphi_p(z),$$

où  $\varphi_p$  est une fonction entière s'écrivant  $\varphi_p(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  avec des coefficients  $a_n$  positifs.

- (c) Dédurre de (b) que si  $|z| \leq 1$ , alors

$$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

- (4) Montrer que la série  $\sum (\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .  
 (5) Démontrer le résultat souhaité.