

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit $P(z) = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, avec $b \neq 0$. On note α et β les racines complexes de P , et on pose $f(z) = 1/P(z)$.

- (1) Montrer que la fonction f est développable en série entière dans un disque $D(0, r)$, et déterminer le plus grand r possible.
- (2) On note c_n les coefficients du développement en série entière de f dans le disque $D(0, r)$. Montrer que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence

$$bc_n + ac_{n-1} + c_{n-2} = 0.$$

- (3a) On suppose que $\alpha \neq \beta$. Décomposer $f(z)$ en éléments simples, puis exprimer les coefficients c_n en fonction de α et β .
- (3b) On suppose que $\alpha = \beta$. En observant que $f(z)$ est la dérivée de $g(z) = \frac{1}{\alpha - z}$, exprimer les c_n en fonction de α .
- (4) Dans cette question, on prend $P(z) = z^2 + z - 1$. Montrer que les c_n sont des entiers négatifs, et donner une formule explicite pour les c_n .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer que tous les c_n sont réels.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} , $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

- (1) Montrer qu'on a $|c_n| \leq \frac{1}{r^n(1-r)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, 1[$.
- (2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n| \leq e \times (n + 1)$.

Exercice 4. (inégalité de Bohr)

- (1) Soit g une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} , $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$. On suppose que la fonction $\operatorname{Re}(g)$ est positive.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} [g(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta.$$

- (b) En déduire qu'on a $|b_n| \leq 2\operatorname{Re}(b_0)$ pour tout $n \geq 1$.
- (2) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
 - (a) Déduire de (1) qu'on a $|a_n| \leq 2(1 - \operatorname{Re}(a_0))$ pour tout $n \geq 1$.
 - (b) Montrer qu'en fait $|a_n| \leq 2(1 - |a_0|)$ pour tout $n \geq 1$. (*Changer de fonction f*).

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (1/3)^n \leq 1.$$

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} . On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|; |z| = r\}$.

(1) Soit r tel que $|z_0| < r < 1$. Montrer qu'on a

$$2i\pi f(0) = - \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n dz.$$

(2) En déduire que si $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r - |z_0|} |z_0|.$$

Exercice 6. Montrer que si $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ est une fonction holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} , alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dx dy.$$

Exercice 7. Dans tout l'exercice, f est une fonction entière, $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$. On suppose qu'il existe deux constantes A et C telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A e^{C|z|}.$$

(1) Montrer qu'on a $|c_n| r^n \leq A e^{Cr}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.

(2) En choisissant convenablement r dans (1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|c_n| \leq A \left(\frac{Ce}{n}\right)^n.$$

(3) Montrer que la série entière $\sum n! c_n z^{n+1}$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$. Pour $|w| > C$, on posera

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{w^{n+1}}.$$

(4) Montrer que pour toute fonction entière h et pour tout $r > C$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} g(w) h(w) dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^{(n)}(0).$$

(5) Montrer que pour $|w| > C$, on peut écrire

$$g(w) = \frac{1}{w} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{w}\right) e^{-t} dt.$$

(6) Déterminer la fonction g lorsque $f(z) = e^z$ ou $f(z) = \sin z$.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} . Montrer que si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière vérifiant $f(1) = 1$ et $f(2iy) = 4f(iy)$ pour tout $y \in [2, 3]$.

- (1) Pourquoi a-t-on $f(2x) = 4f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$?
- (2) Calculer $f(2^{-k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis déterminer f .

Exercice 10. Soit f une fonction entière. On suppose qu'on a $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- (1) On note Q le carré de sommets, $0, 1, 1+i, i$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $w \in Q$ tel que $f(z) = f(w)$.
- (2) Montrer que f est constante.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que la fonction $u = \operatorname{Re}(f)$ est bornée. Montrer que f est constante. (*Considérer $g = e^f$*).

Exercice 12. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

- (1) On suppose que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans \mathbb{C} . Montrer qu'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ est bien définie et *bornée* sur Ω .
- (2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est non-constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans \mathbb{C} .

Exercice 13. Soit f une fonction entière. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_\alpha(z) = f(\alpha z)$.

- (1) On suppose que les fonctions f_α ne sont pas linéairement indépendantes, autrement dit qu'on peut trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_1^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$.

(a) Pour $r > 0$, on pose $M(r) = \sup \{|f(z)|; |z| \leq r\}$. Montrer qu'on peut trouver trois constantes C, α, β telles que $0 \leq \alpha < \beta$ et

$$\forall t \geq 0 : M(\beta t) \leq C M(\alpha t).$$

(b) On pose $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : M(\rho^k) \leq C^k M(1)$.

(c) Montrer qu'il existe deux constantes K et γ telles que

$$\forall r \geq 1 : M(r) \leq K r^\gamma.$$

- (2) Montrer que si la fonction f n'est pas polynomiale, alors les f_α sont linéairement indépendantes.

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} . On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|; |z| = r\}$. En appliquant le principe du maximum à $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$, montrer que si $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r - |z_0|} |z_0|.$$

Exercice 15. (transformations de Möbius)

Soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\bar{a}$, on pose $\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$.

- (1) Calculer $|\varphi_a(\zeta)|$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.
- (2) En déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
- (3) Montrer que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2},$$

et en déduire à nouveau qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

- (4) Montrer que la restriction de φ_a à \mathbb{D} est une bijection holomorphe de \mathbb{D} sur \mathbb{D} , et déterminer sa réciproque.

Exercice 16. (fonctions sous-harmoniques)

Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est **sous-harmonique** si on a $\Delta u(z) \geq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

- (1) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω , alors $\operatorname{Re}(f)$ et $|f|^2$ sont sous-harmoniques.
- (2) Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sous-harmonique.
 - (a) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r_0 > 0$ tel que $\bar{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Pour $r \in [0, r_0]$, on pose

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

On admet que la fonction I est de classe \mathcal{C}^1 et qu'on peut dériver sous l'intégrale. Établir la formule

$$rI'(r) = \int_{\partial D(z_0, r)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

- (b) Avec les notations de (a), montrer qu'on a $I'(r) \geq 0$ pour tout $r \in [0, r_0]$.

(c) Montrer que pour tout disque $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, on a

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{it}) dt.$$

(3) On suppose que l'ouvert Ω est borné. Montrer que si $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et sous-harmonique dans Ω , alors

$$\forall z \in \Omega : u(z) \leq \sup \{u(\xi); \xi \in \partial\Omega\},$$

avec inégalité stricte si Ω est connexe et si u n'est pas constante.

Exercice 17. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} . Pour $r < 1$, on pose

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

- (1) Soit $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable bornée, avec $\|\phi\|_\infty \leq 1$.
 - (a) Montrer que la fonction F_ϕ définie par $F_\phi(z) = \int_0^{2\pi} \phi(\theta) f(ze^{i\theta}) d\theta$ est holomorphe sur \mathbb{D} . (*Développer f et série entière*).
 - (b) En utilisant le principe du maximum, montrer que pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $z \in D(0, r)$, on a $|F_\phi(z)| \leq I(r)$.
- (2) Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$, il existe une fonction mesurable $\phi_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $|\phi_r(\theta)| = 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \phi_r(\theta) f(re^{i\theta}) d\theta.$$

- (3) Dédurre des questions précédentes que I est une fonction croissante de r : si $0 \leq r_1 < r_2 < 1$, alors $I(r_1) \leq I(r_2)$.

Exercice 18. (méthode de Phragmén-Lindelöf)

On note U le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$. Soit $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur \overline{U} et holomorphe dans U . On suppose que f est bornée sur ∂U , et on pose $M = \sup\{|f(\xi)|; \xi \in \partial U\}$. On suppose de plus qu'il existe un nombre $\alpha \in [0, 1[$ et une constante C tels que $|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}$ pour tout $z \in U$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.

- (1) Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement le principe du maximum?
- (2) Soit β vérifiant $\alpha < \beta < 1$. On définit z^β dans \overline{U} en prenant l'argument dans $] -\pi, \pi]$. Montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\operatorname{Re}(z^\beta) \geq \delta|z|^\beta$ pour tout $z \in \overline{U}$.
- (3) Soit toujours β vérifiant $\alpha < \beta < 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_\varepsilon(z) = e^{-\varepsilon z^\beta} f(z).$$

- (a) Montrer qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \overline{U}$, et déduire de (2) qu'on a aussi $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f_\varepsilon(z) = 0$.
- (b) Montrer que si $z \in U$ et si $R > |z|$, alors $|f_\varepsilon(z)| \leq \max(M, M_\varepsilon(R))$, où $M_\varepsilon(R) = \sup\{|f_\varepsilon(\xi)|; \xi \in U \cap \partial D(0, R)\}$.
- (c) Déduire de (a) et (b) qu'on a $|f_\varepsilon(z)| \leq M$ pour tout $z \in U$.
- (4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'on a $\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = +\infty$. En appliquant le principe du minimum local, montrer que f s'annule au moins une fois dans \mathbb{D} .

Exercice 20. (théorème de l'application ouverte)

Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de montrer que l'image par f de tout ouvert $V \subset \Omega$ est un ouvert de \mathbb{C} .

- (1) Soit V un ouvert de Ω et soit $a \in V$. On pose $b = f(a)$.
- (a) Justifier l'existence d'un disque ouvert D de centre a tel que $\overline{D} \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D} \setminus \{a\}$.
- (b) On pose $\varepsilon = \inf\{|f(\xi) - b|; \xi \in \partial D\}$. Pourquoi ε est-il *strictement* positif?
- (c) Soit $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$. Montrer qu'on a $|f(a) - w_0| < \varepsilon/2$ et $|f(\xi) - w_0| \geq \varepsilon/2$ pour tout $\xi \in \partial D$.
- (2) On garde les notations de (1), et on pose $g(z) = f(z) - w_0$. Montrer que $|g|$ possède un minimum sur \overline{D} , et que ce minimum est atteint en un point $z_0 \in D$. Que peut-on en déduire sur la valeur de ce minimum?
- (3) Conclure.

Exercice 21. (forme invariante du lemme de Schwarz)

Soit f est une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

- (1) Soit $b \in \mathbb{D}$. Avec les notations de l'exercice 15, calculer $\varphi_{f(b)} \circ f \circ \varphi_b(0)$.
- (2) Montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{D}$, on a l'inégalité

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{1 - \overline{f(b)}f(a)} \right| \leq \left| \frac{b - a}{1 - \overline{b}a} \right|.$$

Exercice 22. Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0, r)$. On suppose qu'on a $f(0) = 0$, et qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $\operatorname{Re}(f(z)) \leq A$ pour tout $z \in D(0, r)$.

- (1) Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(w) = \frac{f(rw)}{2A - f(rw)}$ est bien définie et holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} .

- (2) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer qu'on a $|\phi(w)| \leq |w|$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.
- (3) En déduire que pour tout $z \in D(0, r)$, on a $|f(z)| \leq 2A \frac{|z|}{r-|z|}$.

Exercice 23. (automorphismes de \mathbb{D})

Soit φ un **automorphisme** du disque unité \mathbb{D} , i.e. une bijection \mathbb{D} sur \mathbb{D} telle que φ et φ^{-1} sont holomorphes.

- (1) On suppose qu'on a $\varphi(0) = 0$. En appliquant le lemme de Schwarz à φ et φ^{-1} , montrer que φ est une rotation : $\varphi(z) = \lambda z$, où $|\lambda| = 1$.
- (2) On ne suppose plus que $\varphi(0) = 0$. Montrer que φ est de la forme $\varphi(z) = \lambda \varphi_a(z)$, où $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$ (cf l'exercice 15).

Exercice 24. Déterminer les développements de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines indiqués.

- (1) $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{3-z}$ dans $\{0 < |z-1| < 2\}$ et dans $\{0 < |z-3| < 2\}$.
- (2) $g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $\{|z| < 1\}$, dans $\{1 < |z| < 2\}$ et dans $\{|z| > 2\}$.
- (3) $h(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$ dans $\{|z| > 1\}$.

Exercice 25. Soit $r > 1$, et soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C_r = \{1/r < |z| < r\}$.

- (1) Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(1/\bar{z})}$ est holomorphe sur C_r , et exprimer ses coefficients de Laurent en fonctions de ceux de f .
- (2) On suppose qu'on a $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$. Montrer que f ne s'annule pas sur C_r , et qu'on a $\overline{f(z)} \equiv \frac{1}{f(1/\bar{z})}$.

Exercice 26. Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$.

- (1) Pour $w \in \mathbb{C}^*$, on pose $g(w) = f(1/w)$.
- (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $1/g(w)$ est bien défini pour $w \in D(0, r) \setminus \{0\}$, puis montrer que $1/g$ se prolonge en une fonction φ holomorphe sur $D(0, r)$ telle que $\varphi(0) = 0$.
- (b) Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction h holomorphe sur $D(0, r)$ tels que $g(w) = \frac{1}{w^m} h(w)$ pour tout $w \in D(0, r) \setminus \{0\}$.
- (c) On note d_n les coefficients de Laurent de g . Que peut-on dire de d_n pour $n < -m$?
- (2) Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 27. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* et telle que $|f(z)| = o(1/|z|)$ au voisinage de 0. Montrer que 0 est une singularité éliminable pour f .

Exercice 28. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , et soit S un fermé de Ω sans point d'accumulation dans Ω . Montrer que si u est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus S$ et si u admet une limite en chaque point $a \in S$, alors u se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω .

Exercice 29. Soient f et g deux fonctions holomorphes non nulles sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

- (1) On suppose que tous les zéros de f sont également des zéros de g , avec multiplicité au moins égale. Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe dans Ω telle que $g = hf$.
- (2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et qu'on a $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante c telle que $g = cf$.