Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 2

Exercice 1. Soit $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

(1) Trouver une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\omega = dF$.
(2) Calculer $\int_\gamma \omega$, où γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant $(0,0)$ à $(2,4)$.

Exercice 2. Calculer l'intégrale $\int_\gamma [2xydx + (x^2+2y)dy]$, où $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = e^{it}$.

Exercice 3. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $M = (1,1)$.

Exercice 4. (le plus court chemin est la ligne droite)
Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{C}_{p,q}$ l'ensemble de tous les chemins $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$.

(1) Montrer qu'on a $|q-p| \leq l(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$, et qu'on peut avoir égalité.
(2) Montrer que si $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$, alors $|\gamma(t)-p| + |q-\gamma(t)| \leq l(\gamma)$ pour tout $t \in [0,1]$.
(3) Déduire de (2) que si $\gamma \in \mathcal{C}_{p,q}$ vérifie $|q-p| = l(\gamma)$, alors l'image de γ est le segment $[p,q]$.

Exercice 5. Soit $K = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\,, \mathrm{Re}(z) \geq 0\,, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

(1) Calculer $I = \int_{\partial K} x^2dx$ directement à partir de la définition.
(2) Retrouver la valeur de I en appliquant la formule de Green-Riemann.

Exercice 6. Calculer de deux manières $I = \int_{\partial K} xy\,dx$, où K est le carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Exercice 7. Calculer de deux manières $\int_\gamma ydx$, où $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = Re^{it}$ $(R > 0)$.

Exercice 8. Soit $\omega = (y^2 - x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^2 + 2xy)\,dy$. On note Γ_1 le segment $[1,i]$ orienté de 1 vers i, et Γ_2 le quart de cercle de centre 0 joignant 1 à i (orienté de 1 vers i).

(1) Calculer $I_1 = \int_{\Gamma_1} \omega$, d'abord directement, puis en utilisant la formule de Green-Riemann.
(2) Déterminer sans calcul la valeur de $I_2 = \int_{\Gamma_2} \omega$.

Exercice 9. Montrer que si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors l'aire de K est donnée par les formules suivantes :

$$aire(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} (xdy - ydx) = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z} dz \,.$$

Exercice 10. (formule de la divergence)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire dont la frontière est constitué d'une seule courbe de Jordan fermée. Pour tout point $z \in \partial K$, on note $n(z)$ le vecteur unitaire normal à ∂K au point z et dirigé vers l'extérieur de K.

(1) Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage admissible de ∂K. On écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Pour tout $t \in [a,b]$ en lequel γ est dérivable, exprimer $n(\gamma(t))$ en fonction de $x'(t)$, $y'(t)$ et $|\gamma'(t)|$.
(2) Montrer que si V est une application de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de K, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$\int_K \operatorname{div}(V)\, dxdy = \int_{\partial K} V(z) \cdot n(z)\, |dz| \,.$$

Exercice 11. (formule de Cauchy-Pompeiu)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit également K un domaine élémentaire contenu dans Ω.

(1) Soit $a \in \mathring{K}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(a,\varepsilon) \subset \mathring{K}$. Montrer qu'on a

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz + 2i \int_{K \setminus D(a,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a} \,.$$

(2) En passant en coordonnées polaires, montrer que la fonction $w \mapsto 1/w$ (définie arbitrairement en 0) est intégrable sur tout disque $D(0,R)$. En déduire que si $a \in \mathbb{C}$, alors la fonction $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \times \frac{1}{z-a}$ (définie arbitrairement en a) est intégrable sur K.
(3) Montrer que pour tout point $a \in \mathring{K}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a} \,.$$

Exercice 12. Soient $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle (fermé) de centre $a \in \mathbb{C}$ et D un disque ouvert de centre a et contenant R. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, alors $\int_{\partial R} f(z)\, dz = \int_{\partial D} f(z)\, dz$.

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un domaine élémentaire $K \subset \mathbb{C}$.

(1) Montrer qu'on a $\int_{\partial D}(\bar{z} - f(z))dz = 2i\, aire(K)$.

(2) En déduire l'inégalité suivante :

$$\sup_{z \in \partial D} |\bar{z} - f(z)| \geq 2\, \frac{aire(K)}{l(\partial K)} \,.$$

Exercice 14. (transformée de Fourier de la Gaussienne)

(1) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On supose qu'il existe une fonction continue $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \;:\; |f(z)| \leq \frac{C(y)}{1 + x^2} \,.$$

(a) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ib)\, dt$ est bien définie.

(b) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. En appliquant le théorème de Cauchy, montrer qu'on a $\int_{-R}^{R} f(t)\, dt - \int_{-R}^{R} f(t+ib)\, dt = i \int_0^b f(-R+is)\, ds - i \int_0^b f(R+is)\, ds$.

(c) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + ib)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \;.$$

Quelle est la valeur de l'intégrale de droite?

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt$.

Exercice 15. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

(1) Justifier l'existence de I.

(2) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) = \alpha e^{it}$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) = \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors

$$\int_{\gamma_R} g(z)\, dz - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\, dz = 4 \int_{\varepsilon}^{R} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx \,.$$

(3) En déduire la valeur de I.

Exercice 16. En considérant la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-iz-1}{z^3}$ calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx$.

Exercice 17. En intégrant e^{-z^2} sur le bord des secteurs angulaires

$$\Sigma_R = \left\{ re^{i\theta};\ 0 \le r \le R\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}\ ,\quad R > 0\,,$$

montrer que les intégrales $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$ et $\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt$ existent en un sens à préciser, et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt\ .$$

Exercice 18. Pour $\alpha \in \,]-1,1\,[$, on pose $I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \log x}{x^2-1}\,dx$.

(1) Justifier l'existence de I_α.

(2) Pour $0 < \varepsilon < 1/2 < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} = \{ z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\,,\ \varepsilon \le |z| \le R\ ,\ |z-1| \ge \varepsilon \text{ et } |z+1| \ge \varepsilon \}\,.$$

(3) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}^-$, on pose $f(z) = \frac{z^\alpha \log z}{z^2-1}$, où $\log z$ et z^α sont calculés en prenant l'argument dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$. En appliquant le théorème de Cauchy à f, calculer l'intégrale I_α.

Exercice 19. Dans tout l'exercice, $c_0, \ldots, c_n$ sont des nombres complexes fixés.

(1) On pose $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$.
   (a) Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} |P(t)|^2\,dt$ en fonction des coefficients c_j.
   (b) Calculer $\int_0^1 P(x)^2\,dx$ en fonction des c_j.

(2) Soit toujours $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$
   (a) On suppose que tous les c_j sont réels. En intégrant $f(z) = P(z)^2$ sur le bord des domaines élémentaires $K^+ = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$ et $K^- = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \le 0\}$, montrer qu'on a

$$\int_{-1}^1 P(x)^2 dx \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt.$$

   (b) On ne fait plus d'hypothèse sur les c_j. En écrivant $c_j = a_j + ib_j$ où $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, déduire de (a) et (1a) qu'on a $\int_{-1}^1 |P(x)|^2 dx \le \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2$.

(3) Établir l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{j,k=0}^n \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right| \le \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2.$$

Exercice 20. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité, et soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| \ne 1$.

(1) Calculer l'intégrale $I(a) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z-a}$ en appliquant le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy.

(2) Calculer directement $I(a)$ en développant $\frac{1}{z-a}$ en série.

Exercice 21. Calculer les intégrales $I = \int_{\partial D(0,3)} \frac{\sin z}{z}\, dz$ et $J = \int_{\partial D(\frac{5}{2},1)} \frac{e^{-z}}{z(z^2-4)}\, dz$.

Exercice 22. Soit ω_0 la 1-forme différentielle $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{C}^*$.

(1) Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire tel que $0 \in \mathring{K}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(0,\varepsilon) \subset \mathring{K}$. En appliquant convenablement la formule de Green-Riemann, montrer qu'on a $\int_{\partial K} \omega_0 = \int_{\partial D(0,\varepsilon)} \omega_0$.

(2) Déduire de (1) que si K est un domaine élémentaire tel que $0 \in \mathring{K}$, alors

$$\int_{\partial K} \omega_0 = 2\pi\,.$$

Exercice 23. Soit ω_0 la 1-forme différentielle $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{C}^*$.

(1) Montrer qu'on a $\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\omega_0$.

(2) En appliquant la formule de Cauchy, en déduire une "autre" preuve du résultat de l'exercice 22 : si K est un domaine élémentaire tel que $0 \in \mathring{K}$, alors $\int_{\partial K} \omega_0 = 2\pi$.

Exercice 24. Soit toujours $\omega_0 = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\cdot$ Effectuer directement le calcul de $\int_{\partial K} \omega_0$ lorsque K est le carré $[-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 25. Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < 1$. On pose $I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-a|^2}\cdot$

(1) Montrer qu'on a $I(a) = \frac{1}{i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{(z-a)(1-\bar{a}z)}\cdot$

(2) En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 26. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et Q sans racines dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Im}(z_0) > 0$, alors la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t-z_0}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z_0}\, dt$.

Exercice 27. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire.

(1) Soit $z_0 \in \mathring{K}$. En utilisant la formule de Cauchy, montrer qu'il existe une constante $C(z_0)$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K, on a $|f(z_0)| \leq C \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial K\}$.

(2) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de K. En appliquant (1) à f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $z \in K$, on a

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial K\}\,.$$

Exercice 28. Soit φ une fonction holomorphe au voisinage d'un segment $\Gamma = [ia, ib]$ de l'axe imaginaire ($a < b$). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on pose

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,.$$

(1) Soit $\zeta_0 \in]ia, ib[$ et soit $r > 0$ tel que φ est holomorphe au voisinage de $\overline{D}(\zeta_0, r)$, avec $]\zeta_0 - ir, \zeta_0 + ir[\subset]ia, ib[$. On pose $V = \{z \in D(\zeta_0, r);\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Calculer $\int_{\partial V} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ pour $z \in V$ et pour $z \in D(\zeta_0, r) \setminus V$.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction u continue sur $D(\zeta_0, r)$ telle que $\Phi(z) = -\varphi(z) + u(z)$ pour $z \in V$ et $\Phi(z) = u(z)$ pour $z \in D(\zeta_0, r) \setminus V$.

(2) Montrer que pour tout point $\zeta \in]\, ia, ib[$, on peut écrire

$$\varphi(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \mathrm{Re}(z) < 0}} \Phi(z) - \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \mathrm{Re}(z) > 0}} \Phi(z)\,.$$