Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 22 Mai 2012

Durée : 4h

Questions "de cours".

(1) Démontrer la formule de Green-Riemann dans le cas où le domaine élémentaire est un rectangle.

(2) Montrer que si f est une fonction holomorphe, alors la fonction $u = |f|^2$ vérifie $\Delta u \geq 0$.

(3) Soit f une fonction entière. On suppose qu'on a $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 6$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En appliquant le théorème de Liouville à $g = e^f$, montrer que f est constante.

(4) Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose qu'on a $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En appliquant le lemme de Schwarz à $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, montrer qu'on a $|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(5) Soit $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos t+5}\cdot$ Mettre I sous la forme $\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\,dz$ pour une certaine fonction f (où $\mathbb{D}$ est le disque unité), puis calculer I.

(6) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2z^3 + 4z^2 + 3z + 8 = 0$ dans le disque $D(0,3)$.

(7) Soient U et V deux ouverts connexes de $\mathbb{C}$. En utilisant le théorème de l'application ouverte et le principe d'identité, montrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes sur V et s'il existe une fonction holomorphe non constante $\phi : U \to V$ telle que $f \circ \phi = g \circ \phi$, alors $f = g$.

(8) Montrer que pour tout polynôme P, la formule $f(z) = \int_0^\infty P(t)e^{itz}dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $U = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

(9) On note log la détermination principale du logarithme. Montrer que la formule $f(z) = \sum_1^\infty \frac{\log(3+nz)}{n^2}$ définit une fonction holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

(10) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum |a_n|^2$ est convergente. En utilisant un développement limité de $\cos(a_n)$, montrer que le produit infini $\prod \cos(a_n)$ est convergent.

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que $|f(z)|$ tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$.

(1) Pour $w \in \mathbb{C}^*$, on pose $g(w) = f(1/w)$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $1/g(w)$ est bien défini pour $w \in D(0,r)\setminus\{0\}$, puis montrer que $1/g$ se prolonge en une fonction φ holomorphe sur $D(0,r)$ telle que $\varphi(0) = 0$.
(2) Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction h holomorphe sur $D(0,r)$ tels que $g(w) = \frac{1}{w^m}\, h(w)$ pour tout $w \in D(0,r) \setminus \{0\}$.
(3) On note d_n les coefficients du développement en série de Laurent de g dans $D(0,r) \setminus \{0\}$. Que peut-on dire de d_n pour $n < -m$?
(4) Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 2. En considérant la fonction $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2+1}$ et (pour $R > 0$) les domaines élémentaires $K_R = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\, dx\,.$$

Exercice 3. Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{D}$ le disque unité, et $H^\infty(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphes et *bornées*. On fixe également une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$, où les a_n sont deux à deux distincts et $a_n \neq 0$ pour tout n. Enfin, on note $Z(f)$ l'ensemble des zéros d'une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$. Le but de l'exercice est d'établir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(P1) Il existe une fonction $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que $Z(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$;
(P2) la série $\sum(1 - |a_n|) < \infty$ est convergente.

(1) Pour $a \in \mathbb{D}$, on définit une fonction $\varphi_a = \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ par $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
  (a) Pourquoi φ_a est-elle continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}$?
  (b) Montrer qu'on a $|\varphi_a(\xi)| = 1$ pour tout point $\xi = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.
  (c) Montrer qu'on a $|\varphi_a(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
(2) On suppose (P1) vérifiée pour une certaine fonction $f \in H^\infty(\mathbb{D})$.
  (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f_N holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f(z) = (z-a_0)(z-a_1)\cdots(z-a_N)f_N(z)$.
  (b) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $B_N(z) = \prod_{n=0}^{N} \varphi_{a_n}(z)$.
    (i) Montrer que la fonction $\frac{f}{B_N}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{D}$.
    (ii) En déduire que pour tout $r \in [0,1[$, on a

$$\frac{|f(0)|}{|B_N(0)|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\inf\{|B_N(z)|;\ |z| = r\}}\,,$$

    où on a posé $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in \mathbb{D}\}$.

(c) En utilisant (b) et (1b), montrer qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\forall N \in \mathbb{N} \; : \; \prod_{n=0}^{N} |a_n| \geq \delta \, .$$

(d) En utilisant (c) et l'inégalité $\log(t) \leq t-1$, montrer que (P2) est vérifiée.

(3) On suppose (P2) vérifiée.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $b_n : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ par $b_n(z) = -\frac{|a_n|}{a_n} \varphi_{a_n}(z) \cdot$ Montrer qu'on a

$$1 - b_n(z) = \frac{1-|a_n|}{1-\bar{a}_n z} \left(1 + \frac{|a_n|}{a_n} \, z \right),$$

et en déduire que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$|1 - b_n(z)| \leq 2 \, \frac{1-|a_n|}{1-|z|} \, .$$

(b) Déterminer $Z(b_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que (P1) est vérifiée en utilisant un produit infini.