Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

Examen du 21 Juin2012

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) On note log la détermination principale du logarithme. calculer $\log(\sqrt{3}+i)$.

(2) Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \partial K$, calculer l'intégrale $I(a) = \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a}$.

(3) Soit f une fonction entière, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Pour $r \geq 0$, on pose $M(r) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. Démontrer les *inégalités de Cauchy* :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}\cdot$$

(4) Énoncer et démontrer le théorème de Liouville.

(5) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z-4} + \frac{1}{z+2}$ dans la couronne $C = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z-3| < 5\}$.

(6) En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale $I = \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2+3z+1}$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité.

(7) Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et soit n un entier au moins égal à 2. Montrer que si $r > \max\left(1, (|a|+|b|)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, alors $|a|\, r + |b| \leq (|a|+|b|)\, r$ et l'équation $z^n + az + b = 0$ possède n solutions dans le disque $\overline{D}(0,r)$.

(8) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose qu'on a $|f_q(z) - f_p(z)| \leq \frac{2^{-p-q}}{1-|z|}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$. Montrer que la suite (f_n) converge en tout point $z \in \mathbb{D}$, et que la fonction $f = \lim f_n$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

(9) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la formule $f(z) = \int_1^\infty t^\alpha e^{-tz} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(10) Montrer que la formule $f(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^3}{n^3}\right)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et déterminer les zéros de la fonction f.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est **sous-harmonique** si on a $\Delta u(z) \geq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

(1) Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, et soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Pour $r \in [0, r_0]$, on pose

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)\, dt\,.$$

(a) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, r_0]$, et établir la formule

$$rI'(r) = \int_{\partial D(z_0, r)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\,.$$

(b) On suppose que la fonction u est sous-harmonique. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer qu'on a $I'(r) \geq 0$ pour tout $r \in [0, r_0]$.

(2) Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et sous-harmonique. En utilisant (1b), montrer que pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, on a

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{it})\, dt\,.$$

(3) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors

$$|f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_0 e^{it})|^2 dt$$

pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(1) On pose $V = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions strictement positives et intégrables sur I, alors la formule

$$\Psi(z) = \int_I f(t)^{1-z} g(t)^z\, dt$$

définit une fonction continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V. (*Indication* : on pourra poser $h(t) = \max(|f(t)|, |g(t)|)$ et utiliser l'inégalité $|f(t)^{1-z} g(t)^z| \leq h(t)$, après l'avoir démontrée).

(2) Soient f et g deux fonctions strictement positives et intégrables sur I. Pour $z \in \overline{V}$, on pose

$$\Phi(z) = \frac{\int_I f(t)^{1-z} g(t)^z\, dt}{\left(\int_I f(t)\, dt\right)^{1-z} \left(\int_I g(t)\, dt\right)^z}\,.$$

(a) Pourquoi Φ est-elle continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V?

(b) Montrer que si $z = x + iy \in \overline{V}$, alors $|\Phi(z)| \leq |\Phi(x)|$. En déduire d'une part que Φ est bornée sur $\overline{V}$, et d'autre part qu'on a $|\Phi(\xi)| \leq 1$ pour tout $\xi \in \partial V$.

(c) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)e^{\varepsilon z^2}$.

(i) Montrer que pour $z = x + iy \in \overline{V}$, on a $|\Phi_\varepsilon(z)| = |\Phi(z)|e^{\varepsilon(x^2-y^2)}$.

(ii) Pour $R > 0$, on pose $V_R = \{z \in V;\ |\mathrm{Im}(z)| < R\}$. Déduire de (i) et de (b) que

$$\forall \xi \in \partial V_R\ :\ |\Phi_\varepsilon(\xi)| \leq \max(e^\varepsilon, \|\Phi\|_\infty e^{\varepsilon(1-R^2)})\,,$$

où on a posé $\|\Phi\|_\infty = \sup\{|\Phi(z)|;\ z \in \overline{V}\}$.

(iii) En utilisant le principe du maximum, montrer qu'on a $|\Phi_\varepsilon(z)| \leq e^\varepsilon$ pour tout $z \in V$.

(3) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$\int_I f(t)^{1-\alpha} g(t)^\alpha\, dt \leq \left(\int_I f(t)\, dt\right)^{1-\alpha} \left(\int_I g(t)\, dt\right)^{\alpha}.$$

Exercice 3. En considérant, pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, les domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,r} = \left\{z \in \mathbb{C};\ \varepsilon \leq |z| \leq R \text{ et } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\right\},$$

calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}\,.$$