Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Variable complexe*

DS du 20 Mars 2012

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^w = i\beta$ pour $\beta > 0$ fixé, puis résoudre l'équation $\sin z = 3$.

(2) Déterminer toutes les fonctions f holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ f(e^{\frac{1}{n}}) = 3 + \frac{2}{n}\cdot$

(3) En utilisant convenablement le théorème de Liouville, déterminer toutes les fonctions entières f vérifiant $f(0) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 7$.

(4) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D}(0, R)$, et soit $a \in D(0, R)$. On suppose que a est un zéro de f avec multiplicité $p \geq 1$, et qu'on a $|f(\xi)| \leq 6$ pour tout $\xi \in \partial D(0, R)$. En appliquant le principe du maximum à $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^p}$, montrer qu'on a $|f(z)| \leq 6\, \frac{|z-a|^p}{(R-|a|)^p}$ pour tout $z \in D(0, R)$.

(5) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| \leq 1$.
   (a) On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients du développement de Laurent de f dans $\mathbb{C}^*$. Montrer qu'on a $|c_n| \leq r^{-n+\frac{1}{2}}$ pour tout $r \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que f peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(6) Décomposer $f(z) = \frac{1}{z^2-6z+5}$ en éléments simples, puis déterminer le développement en série de Laurent de f dans la couronne $C = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 5\}$.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de montrer que les deux intégrales "généralisées" $I = \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$ et $J = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$ existent, et de calculer ces deux intégrales.

(1) Pour $R > 0$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_R = \left\{re^{i\theta};\ 0 \leq r \leq R\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}\cdot$$

(2) Soit $R > 0$. Montrer que si f est une fonction holomorphe au voisinage de K_R, alors

$$\int_0^R f(re^{i\frac{\pi}{4}})\,dr = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^R f(t)\,dt + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right),$$

où $\gamma_R : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$ est le chemin défini par $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$.

(3) Montrer que $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}]\ :\ \cos(u) \geq 1 - \frac{2}{\pi}\,u$, et en déduire que pour tout $R > 0$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2\theta)}d\theta \leq \frac{\pi}{4R^2}\cdot$$

(4) On rappelle que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$ En considérant $f(z) = e^{-z^2}$, déduire des questions précédentes que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty e^{-ir^2}\,dr$ existe et qu'on a

$$\int_0^\infty e^{-ir^2}\,dr = e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

(5) Montrer que I et J existent et donner leurs valeurs.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot$

(1) Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1, \infty[$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ -\dfrac{\log(1-z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

où log est la détermination principale du logarithme. Montrer que f est holomorphe sur Ω, et donner son développement en série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(2) On définit $F : \Omega \cup \{1\} \to \mathbb{C}$ par $F(1) = S$ et

$$\forall z \in \Omega\ :\ F(z) = \int_{[0,z]} f(\xi)\,d\xi\,,$$

où le segment $[0, z]$ est orienté de 0 vers z.

(a) Montrer que si $z \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{C}$ vérifie $z + h \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned} F(z+h) &= F(z) + \int_{[z,z+h]} f(\xi)\,d\xi \\ &= F(z) + h\int_0^1 f(z+th)\,dt\,. \end{aligned}$$

(b) En déduire que F est holomorphe sur Ω avec $F' = f$.

(c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$(*) \qquad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \cdot$$

(3) Montrer que la formule $\widetilde{F}(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et en déduire que $(*)$ est valable pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

(4) On note U l'ouvert $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

(a) Pour $u \in U$, on pose

$$\Phi(u) = F(-1/u) + F(-u) + \frac{1}{2} (\log(u))^2 .$$

Montrer que la fonction Φ est constante sur U.

(b) Montrer que $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} S$, et en déduire à l'aide de (3) qu'on a $F(-1) = -\frac{1}{2} S$.

(c) Conclure que

$$\forall u \in U \ : \ F(-1/u) + F(-u) + \frac{1}{2} (\log(u))^2 = -S .$$

(5) On pose $\mathbb{T}^+ = \{u \in \mathbb{C};\ |u| = 1 \text{ et } \mathrm{Im}(u) > 0\}$. Déterminer $\lim\limits_{\substack{u \to -1 \\ u \in \mathbb{T}^+}} \log(u)$.

(6) Calculer S.