MAT3

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. Soit $\gamma : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma(t) = (\cos t + \ln(\tan(t/2)), \sin t)$. Calculer la longueur de γ.

Exercice 2. Soit $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5 + x^{3/2}$. Calculer la longueur du graphe de f.

Exercice 3. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant le point $(0, 0)$ au point $(1, 1)$.

Exercice 4. Soient $a, b > 0$, et soit $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$ défini par $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Dessiner la courbe paramétrée par γ, et calculer sa longueur.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \varphi \, dl$, où Γ est l'arc de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ joignant le point $(\frac{1}{2}, 2)$ au point $(2, \frac{1}{2})$.

Exercice 6. (longueur en coordonnées polaires)

(1) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une coube régulière. On suppose que Γ admet un paramétrage $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ de la forme
$$\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos\theta, r(\theta) \sin\theta),$$
où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la longueur de Γ est donnée par la formule
$$l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} \, d\theta.$$

(2) Soit $a > 0$. Calculer la longueur de la courbe Γ d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.

(3) Soit $a > 0$. On note Γ la courbe d'équation polaire $r = a\theta$, avec $0 \le \theta \le 6\pi$. Dessiner Γ et calculer sa longueur.

Exercice 7. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \frac{-y}{(x^2+y^2+1)^2} \, dx + \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2} \, dy$, où Γ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice 8. Soit $\omega = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

(1) Trouver une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\omega = dF$.
(2) Calculer $\int_\gamma \omega$, où γ est l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant $(0,0)$ à $(2,4)$.

Exercice 9. Calculer $\int_\gamma 2xydx + (x^2+2y)dy$, où $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ est le chemin défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Exercice 10. Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma x^2dx + y^2dy$, où Γ est l'arc de la courbe d'équation $x^2 - y^2 = a^2$ joignant le point $(a, 0)$ au point $(\sqrt{2}\, a, a)$.

Exercice 11. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma (y^2 - x^2 + 2xy)\, dx + (x^2 - y^2 + 2xy)\, dy$, où Γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant $(1,0)$ à $(0,1)$.

Exercice 12. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$, et soit ω la forme différentielle sur Ω définie par

$$\omega = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\, dx - \left(\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y^2} \right) dy\,.$$

Calculer l'intégrale $\int_\gamma \omega$, où $\gamma : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ est le chemin défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Exercice 13. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le bord du triangle de sommets $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, orienté dans le sens positif. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma (x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$.

Exercice 14. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le segment joignant les points $p = (1,0)$ et $q = (0,1)$.

(1) Calculer $I = \int_\Gamma x^2dy$ directement à partir de la définition.
(2) Retrouver la valeur de I en appliquant la formule de Green-Riemann dans le triangle $0pq$.

Exercice 15. Calculer de deux manières $I = \int_\Gamma xy\, dx$, où Γ est le bord du carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Exercice 16. Soit $R > 0$. Calculer de deux manières l'intégrale $\int_\gamma ydx$, où $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ est le chemin défini par $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$.

Exercice 17. Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\,,\ x^2+y^2 < 4 \text{ et } \frac{x^2}{4} + y^2 > 1\right\}$.

(1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.
(2) Calculer l'intégrale $\int_\mathcal{D} (y^2 - x^2)\, dxdy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 18. Soit $a > 0$, et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$. Dans la suite, on note $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par γ.

(1) Montrer que la partie de Γ correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est le graphe de la fonction $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$.
(2) Étudier la fonction f, puis tracer la courbe Γ.
(3) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ entouré par Γ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 19. Soit $a > 0$, et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par

$$\gamma(t) = (a\cos t(1 + \sin^2 t), a\sin^3 t) .$$

On note Γ la courbe paramétrée par γ. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ entouré par Γ.

Exercice 20. (aire en coordonnées polaires)

(1) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine $\mathcal{D}$. On suppose que Γ admet un paramétrage $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ de la forme

$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\, \cos\theta, r(\theta)\, \sin\theta) ,$$

où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'aire de $\mathcal{D}$ est donnée par la formule

$$aire(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta .$$

(2) Soit $a > 0$. Déterminer l'aire du domaine entouré par la courbe Γ d'équation polaire $r = a\,(1 + \cos\theta)$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.
(3) Soient $p > 0$ et $e \in]0, 1[$. Déterminer l'aire du domaine entouré par la courbe Γ d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, où $0 \le \theta \le 2\pi$.

Exercice 21. (intégration par parties)
Dans tout l'exercice, $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée régulière entourant un domaine $\mathcal{D}$. Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, on pose

$$[V]_\Sigma = \int_\Sigma \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{d\Phi} .$$

(1) Montrer que si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors

$$\mathrm{div}(f\,\overrightarrow{V}) = f\,\mathrm{div}(\overrightarrow{V}) + \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{V} .$$

(2) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors on a la formule d'"intégration par parties"

$$\int_{\mathcal{D}} f \,\mathrm{div}(\overrightarrow{V})\, dxdy = [f\overrightarrow{V}]_\Sigma - \int_{\mathcal{D}} (\overrightarrow{\nabla} f) \cdot \overrightarrow{V}\, dxdy\,.$$

Exercice 22. (formule de Green)
Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine $\mathcal{D}$. En utilisant l'exercice 21, montrer que si u et v sont des fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors

$$\int_\Sigma \left(u\, \overrightarrow{\nabla} v - v\, \overrightarrow{\nabla} u\right) \cdot d\overrightarrow{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dxdy\,.$$

Exercice 23. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine $\mathcal{D}$.

(1) Soit h une fonction **harmonique** ($\Delta h = 0$) définie au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$. En appliquant la formule d'intégration par parties de l'exercice 21, montrer qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} \|\overrightarrow{\nabla} h\|^2\, dxdy = \int_\Sigma (h\, \overrightarrow{\nabla} h) \cdot d\overrightarrow{\Phi}\,.$$

(2) Soient u et v deux fonctions harmoniques définies au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$. On suppose que u et v sont égales sur Σ.
   (a) Déduire de (1) que la fonction $h = u - v$ est constante sur $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que u et v sont égales sur $\mathcal{D}$.

Exercice 24. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine $\mathcal{D}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$. On suppose que f est nulle sur Σ. En utilisant la formule d'intégration par parties de l'exercice 21 avec les champs de vecteurs constants $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, montrer qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x}\, dxdy = 0 = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdy\,.$$