Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

(1) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.
(2) Pour $\alpha > 0$, on pose
$$I_\alpha = \int_{\mathcal{D}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy\,.$$
En intégrant en coordonnées polaires, déterminer pour quelles valeurs de α on a $I_\alpha < \infty$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive. En utilisant le changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$, montrer qu'on a
$$\int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} f(x-y)e^{-(x+y)} dxdy = \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|} dv\,.$$

Exercice 3. On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-x^2y^2}$.

(1) Soit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\,,\ v > 0\,,\ u + v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u}\right)\,.$$
On *admet* que Φ est une bijection de Ω sur le carré $\Omega' =]0,1[\times]0,1[$. Montrer que Φ est un difféomorphisme.
(2) Calculer J en posant $(x,y) = \Phi(u,v)$.

Exercice 4. On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy}$.

(1) En utilisant le changement de variables $(u,v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a
$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\int_C \frac{dudv}{1-u^2+v^2}\,,$$
où C est le carré de sommets $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ et $(1/2,1/2)$.
(2) On pose $C_+ = \{(u,v) \in C;\ v \geq 0\}$ et $I = \int_{C_+} \frac{dudv}{1-u^2+v^2}$.

(a) Montrer qu'on a

$$J=\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du+\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du.$$

(b) Calculer les deux intégrales précédentes en posant $u=\sin t$ dans la première et $u=\cos(2t)$ dans la deuxième.

(3) Calculer J.

Exercice 5. Soit $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_Nz^N$ un polynôme à coefficients complexes.

(1) Soit $r\geq 0$. Montrer que pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on a

$$|P(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2\,r^{2n}+\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{N}a_k\overline{a_l}\,r^{k+l}\,e^{i(k-l)\theta}\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $r\geq 0$, on a

$$\int_0^{2\pi}|P(re^{i\theta})|^2d\theta=2\pi\sum_{n=0}^{N}|a_n|^2\,r^{2n}\,.$$

(3) On note $\mathbb{D}$ le disque $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$. En intégrant en coordonnées polaires, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}}|P(x+iy)|^2\,dxdy=\pi\sum_{n=0}^{N}\frac{|a_n|^2}{n+1}\,.$$

Exercice 6. Pour $a,b,c>0$, on pose

$$\mathcal{E}(a,b,c)=\left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3;\ \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\leq 1\right\}.$$

(1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1,1,1)$?

(2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a,b,c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 7. Dans cet exercice, on note B la boule $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

(1) En utilisant les coordonnées sphériques, calculer l'intégrale

$$J=\int_B(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz\,.$$

(2) En utilisant la formule de changement de variable, montrer que pour toute fonction positive f définie sur B, on a

$$\int_B f(x,y,z)\,dxdydz=\int_B f(y,z,x)\,dxdydz=\int_B f(z,x,y)\,dxdydz\,.$$

(3) Déduire de (2) qu'on a

$$\int_B x^2\,dxdydz = \int_B y^2\,dxdydz = \int_B z^2\,dxdydz = \frac{1}{3}\,J.$$

(4) Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale

$$J(a,b,c) = \int_B (ax^2 + by^2 + cz^2)\,dxdydz\,.$$

Exercice 8. Pour $s > 0$, on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\,;$$

(1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $s > 0$, on a

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)\,.$$

(2) Calculer $\Gamma(1)$.
(3) Montrer que $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.
(4) Calculer $\Gamma(2)$, $\Gamma(3/2)$ et $\Gamma(5/2)$.

Exercice 9. Soit Γ la fonction introduite à l'exercice 8 :

$$\forall s > 0 \;:\; \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx\,.$$

(1) Soit $\Omega =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$. On *admet* que l'application Φ définie par $\Phi(u,v) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ est un difféomorphisme de Ω sur Ω. En posant $(x,y) = (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$, montrer que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)}\,\frac{dxdy}{x} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(3) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (2).

Exercice 10. Pour $s > 0$, on pose comme d'habitude

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\,;$$

et pour $a, b > 0$, on pose

$$J(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D} =]0,\infty[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^2$. On admet que l'application Φ définie par $\Phi(u,t) = (ut,(1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$. En posant $(x,y) = (ut,(1-u)t)$, montrer que pour $a,b>0$ et pour toute fonction positive $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dxdy = J(a,b)\int_0^\infty t^{a+b-1}f(t)\,dt.$$

(2) Déduire de (1) l'identité

$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

(3) En posant $u = \sin^2\theta$, montrer qu'on a

$$J(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta\,.$$

(4) Déduire de (2), la valeur de $J(1/2,1/2)$. Calculer ensuite $\Gamma(1)$, puis utiliser (1) pour trouver $\Gamma(1/2)$.

Exercice 11. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$: si $x = (x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, alors

$$\|x\| = (x_1^2+\cdots+x_N^2)^{1/2}\,.$$

Dans la suite, on pose

$$C = \{x\in\mathbb{R}^d;\ \|x\|>1\}\,.$$

(1) Soit $\alpha>0$.

(a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^N$, $x\neq 0$, on a

$$\frac{1}{\|x\|^\alpha} = \alpha\int_{\|x\|}^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\,.$$

(b) Pour $t\geq 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{x\in\mathbb{R}^N;\ \|x\|\leq t\}$ et

$$V(t) = \lambda_N(\mathbb{B}(t)) = \int_{\mathbb{B}(t)} dx_1\,\dots dx_N\,.$$

Déduire de (a) qu'on a

$$\int_C \frac{dx_1\dots dx_N}{\|x\|^\alpha} = \alpha\int_1^\infty \frac{V(t)-V(1)}{t^{\alpha+1}}\,dt\,.$$

(2) En utilisant le changement de variable $(u_1,\dots,u_N) = \left(\frac{x_1}{t},\dots,\frac{x_N}{t}\right)$, montrer qu'on a $V(t) = t^N V(1)$ pour tout $t>0$.

(3) Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha>0$ la fonction $x\mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est sommable sur C.

Exercice 12. Dans tout l'exercice on note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$, et $\mathbb{B}_N$ la "boule unité" de $\mathbb{R}^N$: $\mathbb{B}_N = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ \|x\| \leq 1\}$. Enfin, on note V_N le volume N-dimensionnel de $\mathbb{B}_N$:

$$V_N = \lambda_N(\mathbb{B}_N) = \int_{\mathbb{B}_N} dx_1 \cdots dx_N\,.$$

Le but de l'exercice est d'établir la formule

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}\,,$$

où Γ est la fonction définie dans l'exercice 8.

(1) Vérifier que la formule est correcte pour $N = 1, 2, 3$.
(2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t}dt$.
(3) Pour tout $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ \|x\|^2 \leq t\}$ et

$$V(t) = \lambda_N(\mathbb{B}(t)) = \int_{\mathbb{B}(t)} dx_1 \cdots dx_N\,.$$

   (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(x_1^2+\cdots+x_N^2)} dx_1 \cdots dx_N = \int_0^\infty e^{-t}\, V(t)\, dt.$$

   (b) En utilisant le changement de variables $(u_1, \ldots, u_N) = \left(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_N}{t}\right)$, montrer qu'on a $V(t) = t^{N/2} V_N$ pour tout $t > 0$.
   (c) En déduire la formule

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-(x_1^2+\cdots+x_N^2)} dx_1 \cdots dx_N = \Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right) V_N\,.$$

(4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 13. Comme d'habitude, on note $\| \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Pour $r > 0$, on pose $\mathbb{B}_N(r) = \{x \in \mathbb{R}^N;\ \|x\| < r\}$ et $V_N(r) = \lambda_N(\mathbb{B}_N(r))$.

(1) Montrer par un changement de variable qu'on a $V_N(r) = r^N V_N(1)$.
(2) Soit $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.
   (a) Montrer que pour tout $u \in [0, \infty[$, on peut écrire $\varphi(u) = -\int_u^\infty \varphi'(t)\, dt$.
   (b) En déduire l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\|x\|)\, dx = -\int_0^\infty \varphi'(r) V_N(r)\, dr\,.$$

   (c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\|x\|)\, dx = N\, V_N(1) \int_0^\infty r^{N-1} \varphi(r)\, dr\,.$$

Exercice 14. Soient $R, h > 0$. On note $\mathcal{C}(R,h) \subset \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

(1) Dessiner $\mathcal{C}(R,h)$.

(2) Montrer qu'en coordonnées cylindriques, un point $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ appartient à $\mathcal{C}(R,h)$ si et seulement si
$$0 \leq z \leq h \quad \text{et} \quad r \leq R\left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

(3) Calculer le volume du cône $\mathcal{C}(R,h)$ en utilisant les coordonnées cylindriques.

(4) On note G le centre de gravité de $\mathcal{C}(R,h)$.
  (a) Pourquoi le point G est-il situé sur l'axe Oz?
  (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 15. Soit $R > 0$. On pose
$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \text{et}\, x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

(1) Dessiner $\mathcal{A}$.

(2) On note G le centre de gravité de $\mathcal{A}$, et (x_G, y_G) ses coordonnées.
  (a) Expliquer sans calcul pourquoi on a $x_G = y_G$.
  (b) Déterminer les coordonnées de G.

Exercice 16. Dans tout l'exercice, on fixe $R > 0$ et $\theta_0 \in [0, \pi/2[$.

(1) Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine défini par
$$\mathcal{D} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 \leq R^2,\ 0 \leq y \leq z\tan(\theta_0)\}.$$
  (a) Dessiner $\mathcal{D}$, et donner la description de $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires.
  (b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de son centre de gravité.

(2) Soit maintenant $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ le domaine donné en coordonnées sphériques ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$) par
$$\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$
  (a) Calculer le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant les coordonnées sphériques.
  (b) Dessiner $\mathcal{B}$, et retrouver le volume de $\mathcal{B}$ en utilisant le théorème de Guldin.