

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Calculer l'intégrale $J = \int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$.

Exercice 2. Calculer $J = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{x+y}$.

Exercice 3. Calculer $J = \int_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{x^2 y}$, où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$.

Exercice 4. Soit $a > 0$, et soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$. Calculer l'intégrale $J = \int_{\mathcal{D}} e^{2x+y} dx dy$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$. Calculer $J = \int_{\mathcal{D}} x^3 y z^2 dx dy dz$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{D} =]0, \infty[\times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{e^{-y} \sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

- (1) En utilisant l'inégalité $|\sin(xy)| \leq 1$ pour $x \geq 1$ et l'inégalité $|\sin(xy)| \leq xy$ pour $x \in]0, 1[$, montrer que f est sommable sur \mathcal{D} .
- (2) Pour $x > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty e^{-y} e^{ixy} dy$, et en déduire la valeur de $\int_0^\infty f(x, y) dy$.
- (3) Calculer $J = \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$.

Exercice 7. Soit f une fonction positive sur \mathbb{R}^2 . Pour $r > 0$, on note D_r le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon r dans \mathbb{R}^2 , et on pose

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \int_{D_r} f(x, y) dx dy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(r) dr = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

- (1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in I \times I$.
- (2) En déduire, en considérant $\int_{I \times I} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy$, qu'on a $\int_I f g \geq (\int_I f) \times (\int_I g)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $G_f \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f . Montrer qu'on a $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 10. Soit f une fonction positive sur \mathbb{R}^N , et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 nulle en 0. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(f(x)) dx = \int_0^\infty \varphi'(t) \lambda_N(\{x; f(x) > t\}) dt.$$

Exercice 11. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$.
 - (a) Calculer $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx$.
 - (b) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy = J^2$.
- (2) Calculer J .

Exercice 12. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (1) Effectuer le changement de variable $x = 1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx$, et en déduire qu'on a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (2) Montrer que pour tout $y > 0$, on a $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$.
- (3) Montrer qu'on a $\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \pi$.
- (4) Soit $x \in]0, 1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}.$$

- (5) En utilisant convenablement le théorème de Fubini, déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale J .

Exercice 13. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt.$$

- (1) Soit \mathcal{D} le domaine $]0, 1[\times]0, 1[\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^3$, et soit $g = \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$g(x, y, t) = \frac{1}{1 + x^2 t^2} \times \frac{1}{1 + y^2 t^2}.$$

Montrer à l'aide du théorème de Fubini qu'on a

$$J = \int_{\mathcal{D}} g(x, y, t) \, dx dy dt.$$

- (2) Vérifier que pour $(x, y, t) \in \mathcal{D}$ tel que $x \neq y$, on a

$$g(x, y, t) = \frac{1}{x^2 - y^2} \left(\frac{x^2}{1 + x^2 t^2} - \frac{y^2}{1 + y^2 t^2} \right).$$

- (3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1 + x^2 t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1 + y^2 t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_{\mathcal{D}} g(x, y, t) \, dx dy dt = \frac{\pi}{2} \int_{]0, 1[\times]0, 1[} \frac{dx dy}{x + y}.$$

- (4) Calculer J .

Exercice 14. Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu} du \right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt.$$

Exercice 15. En considérant l'intégrale double $\int_{[0, 1] \times [0, 1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} \, dx dy$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 16. On veut calculer l'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx$.

- (1) En utilisant l'inégalité $|\sin x| \leq x$, montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x} e^{-x}$ est sommable sur $]0, \infty[$, de sorte que J est bien définie.
- (2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$.
 - (a) Montrer que f est sommable sur $\mathcal{D} =]0, \infty[\times]1, \infty[$.
 - (b) Pour $y \in [1, \infty[$ fixé, calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xy} e^{ix} dx$, et en déduire la valeur de $\int_0^\infty f(x, y) dx$.
 - (c) Calculer l'intégrale $\int_1^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx$.
- (3) Calculer J .

Exercice 17. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $J = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

(1) Soit $y > 0$ fixé.

(a) En remarquant que $|e^{2ix}| = 1$, montrer que la fonction $x \mapsto e^{(2i-y)x}$ est sommable sur $]0, \infty[$. Montrer ensuite que $e^{(2i-y)X}$ tend vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$, puis calculer l'intégrale $\int_0^\infty e^{(2i-y)x} dx$.

(b) Dédire de (a) qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(2x) e^{-xy} dx = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{y - 2i} \right) = \frac{y}{y^2 + 4}.$$

(c) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, déduire de (b) qu'on a

$$\int_0^\infty \sin^2 x e^{-xy} dx = \frac{2}{y(y^2 + 4)}.$$

(2) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x, y) = y \sin^2 x e^{-xy}$. En utilisant (1c), calculer l'intégrale double

$$J' = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy.$$

(3) Calculer J en utilisant (2) et le théorème de Fubini.

Exercice 18. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

(1) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$.

(a) Montrer que f est sommable sur $]0, A[\times]0, \infty[$ pour tout $A > 0$, et qu'on a

$$\int_{]0, A[\times]0, \infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

(b) Montrer que pour $A > 0$ et $y > 0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x, y) dx = \frac{1}{1 + y^2} - \cos A \frac{e^{-yA}}{1 + y^2} - \sin A \frac{ye^{-yA}}{1 + y^2}.$$

(2) Montrer qu'on a $0 \leq \int_0^\infty \frac{e^{-yA}}{1 + y^2} dy \leq \frac{1}{A}$ et $0 \leq \int_0^\infty \frac{ye^{-yA}}{1 + y^2} dy \leq \frac{1}{A}$ pour tout $A > 0$.

(3) Dédire des questions précédentes que $J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée, et calculer J .