Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Physique-Chimie
Module *MAT3*

Examen du 22 Mai 2012

Durée : 2h

Questions de cours.

(1) Soit $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ la "demi-boule" de centre 0 et de rayon 1 située dans le demi-espace des $z \geq 0$. On note G le centre de gravité de B. Expliquer pourquoi G appartient à l'axe $0z$, puis calculer z_G en utilisant les coordonnées sphériques.

(2) Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2t}\cdot$ Vérifier qu'on a $1 + f'(t)^2 = \frac{(t^4+1)^2}{4t^4}$, puis calculer la longueur du graphe de f.

(3) Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ le quart de cercle de centre $(0,0)$ joignant le point $(2,0)$ au point $(0,2)$. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma 5xy^3 dx + 4yx^2 dy$.

(4) Soit Γ le bord du carré $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$, orienté dans le sens positif. Calculer l'intégrale $\int_\Gamma (\ln(1+x^4) - xy^2)dx + (\sin(e^{5y}) + x^2y)dy$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer le volume du domaine

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 < x \text{ et } x^2+y^2+z^2 < 1\}.$$

(1) Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0, \text{ et } x^2+y^2 < x\}$. Montrer qu'on a

$$volume(\mathcal{D}) = 2\int_\Delta \sqrt{1-(x^2+y^2)}\, dxdy\,.$$

(2) Montrer qu'en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, le domaine Δ correspond à

$$\widetilde{\Delta} = \left\{(r,\theta);\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < r < \cos\theta\right\}.$$

(3) Déduire de (1) et (2) qu'on a
$$volume(\mathcal{D}) = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\,d\theta\,.$$
(4) Finir le calcul en remarquant que $\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\,\sin\theta$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x>0, y>0, z>0 \text{ et } x+y+z<1\}$. On veut calculer l'intégrale
$$J = \int_{\mathcal{D}} \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,dxdydz\,.$$
(1) Soit $\Phi :]0,1[\times]0,1[\times]0,1[\to\mathbb{R}^3$ l'application définie par
$$\Phi(u,v,w) = (u(1-v), uv(1-w), uvw)\,.$$
Montrer que le déterminant jacobien de Φ en un point (u,v,w) est égal à
$$J_\Phi(u,v,w) = u^2v\,.$$
(2) On *admet* que Φ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,1[\times]0,1[$ sur $\mathcal{D}$. Calculer l'intégrale J en posant $(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$.

(3) *Question hors-barême* : montrer que Φ est effectivement un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,1[\times]0,1[$ sur $\mathcal{D}$.